

Таллиннский технический университет

Факультет инфотехнологии

Институт автоматике

Татьяна Кудрявцева

**Методы дискретизации линейных
систем непрерывного времени**

Дипломная работа бакалавра

Руководитель: доц. Юрий Беликов

Таллинн 2015

Декларация: настоящим заявляю, что данная бакалаврская работа является результатом моей самостоятельной работы, представлена в Таллиннский технический университет для получения степени бакалавра, и ранее не была использована для соискания академической степени.

Deklareerin, et käesolev bakalaureusetöö, mis on minu iseseisva töö tulemus, on esitatud Tallinna Tehnikaülikooli bakalaureusekraadi taotlemiseks ja selle alusel ei ole varem taotletud akadeemilist kraadi.

Татьяна Кудрявцева

Дата

Подпись

Оглавление

Abstract	2
Kokkuvõte	3
Резюме	4
1 Введение	5
1.1 Основные цели и задачи работы	6
1.2 Структура работы	7
2 Теоретическая часть	8
2.1 Основные понятия	8
2.2 Математическая модель линейной стационарной системы . . .	10
2.2.1 Пространство состояний	10
2.2.2 Система в форме входа-выхода	11
2.2.3 Передаточная функция	12
2.3 Основные свойства	13
2.3.1 Управляемость	13
2.3.2 Наблюдаемость	13
2.3.3 Устойчивость	14
3 Дискретизация	17
3.1 Аналитический метод	17
3.2 Метод Эйлера	23
3.3 Метод Тастина	27
Заключение	31
Литература	33

Abstract

Discretization methods for continuous-time linear systems

The basic concepts from the systems theory as well as main properties (like controllability, observability and stability) are considered in the thesis. The main goal of this thesis is to give an overview of three classical discretization methods for continuous-time linear systems. Performance of algorithms was shown on the basis of various examples. Finally, advantages and disadvantages are discussed for each of presented method.

Kokkuvõte

Pidevaja lineaarsete süsteemide diskretiseerimise meetodid

Selles töös uuritatakse süsteemiteooria põhimõisteid ja üldised omadused – juhitavus, jälgitavus ning stabiilsus. Käesoleva töö eesmärk on kirjeldada kolm klassikalist pidevaja lineaarsete süsteemide diskretiseerimise meetodid. Algoritmide töövõime on esitatud konkreetsetes näitedes. Lõpuks on antud iga meetodi eelised ja puudused.

Резюме

Методы дискретизации линейных систем непрерывного времени

В этой работе рассматриваются основные понятия теории систем и основные свойства – управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Целью данной работы является рассмотрение трех классических методов дискретизации линейных систем непрерывного времени. Работоспособность алгоритмов проиллюстрирована на конкретных примерах. В заключении перечислены преимущества и недостатки каждого из методов.

Глава 1

Введение

Большая часть поступающей информации может быть представлена либо в непрерывном, либо в дискретном виде. Большинство физических процессов, как например движение и формирование облаков или приливное течение, происходит на непрерывной временной шкале. Поэтому моделируются происходящие вокруг нас процессы естественным образом при помощи дифференциальных или уравнений в частных производных.

В период зарождения электрических приборов, для фиксирования и обработки информации, применялись, в основном, аналоговые приборы, работающие в режиме реального времени. Они использовали специально разработанные электронные схемы, в которых происходило преобразование аналогового сигнала в другую аналоговую информацию. Алгоритм обработки был собран в неизменяемую электрическую схему обработки данных, поэтому ЭВМ были узко специализированными и дорогими в изготовлении. Однако, с развитием вычислительной техники, широкое распространение получила цифровая обработка информации, поскольку вся логика в компьютерах была построена на дискретных системах. Цифровые вычислительные машины были основаны на преобразовании аналоговых сигналов в дискретные последовательности с сохранением информативности.

Одна из причин перехода от систем аналогового вида к цифровым системам заключается в уменьшении количества поступающих данных для исследования интересующего объекта. Можно ограничиться данными, взятыми через определенные моменты времени. Также можно извлекать полученную информацию и передавать для дальнейшей обработки средствами цифровой техники. Таким образом, при рациональном выборе шага дискретизации можно снизить затраты на хранение и обработку полученной информации. Для цифровых типов данных используют методы кодирования, которые обнаруживают ошибки и в дальнейшем исправляют их, а также снижается вероятность получения ошибочного результата при обращении и использо-

вании информации. Данные, выраженные в дискретной форме сигнала, облегчают стандартизацию операций преобразования данных на всех этапах обращения. Снижение стоимости производства и надежности интегральных схем является одним из важных преимуществ использования цифровых сигналов.

Для моделирования физического объекта мы будем использовать дифференцирование непрерывного сигнала. Но если нашей целью будет управление системой, то будем подавать на модель дискретную информацию. Под дискретизацией сигналов подразумевают преобразование систем непрерывного времени в систему дискретного времени с возможностью восстановления исходных данных. В данной работе будут представлены три метода дискретизации: получение точной дискретной модели, методы Эйлера и Тастина.

- Метод точной дискретизации делается через общее решение дифференциальных уравнений.
- Впервые метод Эйлера был описан в 1768 году в работе «Интегральное исчисление». Леонард Эйлер является автором более чем 850 работ по многим математическим и механическим наукам. Его метод является исторически первым методом численного решения задачи Коши. Но ввиду невысокой точности и вычислительной неустойчивости для практического нахождения решений задачи Коши метод Эйлера применяется редко. Однако в виду своей простоты его применяют в теоретических исследованиях дифференциальных уравнений и других математических проблем.
- Билинейное преобразование было представлено в 1947 году для анализа фильтра дискретного времени (через год после показа первого компьютера общего назначения ENIAC обществу) Арнольдом Тестином, в честь которого и был назван этот метод. В целом, основное преимущество данного метода состоит в сохранении всех свойств системы.

Все три метода имеют свои преимущества и недостатки, которые будут описаны и проанализированы.

1.1 Основные цели и задачи работы

- Дать описание систем непрерывного и дискретного времени и некоторые связанные с ними понятия.
- Рассмотреть классические методы дискретизации систем непрерывного времени (аналитический метод, методы Эйлера и Тастина)

- Проиллюстрировать рассмотренные алгоритмы на академических и практических примерах.
- Подвести итоги о преимуществах и недостатках представленных методов.

1.2 Структура работы

В Главе 2 приводится краткая теоретическая справка для систем непрерывного времени и моделей дискретного времени. Кроме этого, дается обзор основных свойств, включающих в себя управляемость, наблюдаемость и устойчивость. Материал этой главы проиллюстрирован несколькими примерами.

Глава 3 посвящена трём методам дискретизации, таким как метод точной дискретизации, методы Эйлера и Тастина. В данной главе были рассмотрены методы дискретизации для одного свойства системы – устойчивости. Было проанализировано, что метод точной дискретизации и метод Тастина сохраняют свойства устойчивости. Однако, использование метода Эйлера, при неверно выбранном шаге, может привести к нарушению данного свойства.

Последняя глава посвящена заключению и выводам о проделанной работе.

Глава 2

Теоретическая часть

В данной части представлен краткий обзор основных понятий теории систем. Также вводим описания систем непрерывного и дискретного времени и рассматриваем основные свойства.

2.1 Основные понятия

Определение 1 ([5]) Система – это совокупность компонентов, которые между собой взаимодействуют и выполняют поставленную цель.

Система не ограничена физическими рамками предметов. Понятие системы может быть применено к абстрактному, динамическому феномену, как например, те, что встречаются в экономике. Следовательно, слово система должно интерпретироваться таким образом, что бы оно подразумевало физические, биологические, экономические и тому подобные системы.

Определение 2 ([9]) Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение начального состояния с течением времени.

Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы, его называют законом эволюции. Динамические системы – это механические, физические, химические и биологические объекты, вычислительные процессы и процессы преобразования информации, совершаемые в соответствии с конкретными алгоритмами. Описания динамических систем для задания закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории

графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы.

Математическая модель динамической системы считается заданной, если введены параметры (её координаты) системы, определяющие однозначно ее состояние, и указан закон эволюции. В зависимости от степени приближения одной и той же системе могут быть поставлены в соответствие различные математические модели.

Определение 3 ([5]) *Состояние (системы) – это состояние динамической системы, которое является минимальным набором переменных состояния, так что данные этих переменных на $t = t_0$, вместе с данными входа для $t \geq t_0$, полностью определяет поведение системы для любого времени $t \geq t_0$.*

Обратим внимание, что понятие состояния не ограничивается физическими системами. Это приемлемо для биологических, экономических, социальных и других систем.

Определение 4 ([11]) *Величины, определяющие внешние воздействия на систему, называются ее входными сигналами. Величины, определяющие действие системы на окружающую среду, называются выходными сигналами системы. Переменными состояниями системы называются вспомогательные величины, характеризующие внутреннее состояние системы в каждый момент времени.*

Определение 5 ([5]) *Переменные состояния динамических систем являются переменными, которые являются минимальным набором для определения состояния динамической системы. По крайней мере n переменных x_1, x_2, \dots, x_n нужно для полного описания поведения динамической системы (в случае, когда вход задан для $t \geq t_0$ и начальное состояние t_0 установлено, то будущее состояние системы будет полностью определено), тогда количество n переменных является набором переменных состояния.*

Определение 6 ([5]) *Пространство состояний – это n -мерное пространство, чьи оси координат состоят из осей x_1, x_2, \dots, x_n , где x_1, x_2, \dots, x_n являются переменными состояния, называется пространством состояний.*

2.2 Математическая модель линейной стационарной системы

2.2.1 Пространство состояний

Рассмотрим систему непрерывного времени со многими входами, многими выходами (MIMO), заданную уравнениями пространства

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ или $x(t) = [x_1(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T$ – вектор состояний системы, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ – вектор выходов системы, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ – вектор входов системы и t – временная переменная. Более того, A – матрица состояний размерностью $n \times n$, B – матрица входов размерностью $n \times m$, C – матрица выходов размерностью $p \times n$ и D – матрица прямой связи размерностью $p \times m$.

Схожим образом определим систему дискретного времени

$$\begin{aligned}x[k+1] &= Fx[k] + Gu[k] \\ y[k] &= Cx[k] + Du[k],\end{aligned}\tag{2.2}$$

где переменные определяются схожим образом, как и в случае системы (2.1). Заметим, что система с одним входом и одним выходом (SISO) может быть получена из (2.1) и (2.2) при $p = m = 1$. Далее, как правило, мы будем опускать переменные t и k , чтобы сделать запись более компактной, то есть $\xi := \xi(t)$ или $\psi := \psi[k]$.

Первое уравнение в (2.1) может быть переписано в векторно-матричной форме следующим образом

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} u.\tag{2.3}$$

Аналогично определяется матричная форма записи и для выходного уравнения.

Пример 1: Возьмем для примера модель [1] двигателя постоянного тока (DC-motor), заданную следующими дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{b}{J}x_1 + \frac{K}{J}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где x_1 – скорость вращения, x_2 – электрический ток, u – напряжение. Числовые значения переменных приведены в Таблице 2.1.

Таблица 2.1: Физические параметры

Переменная	Числовые значения
Момент инерции ротора (J)	0.01 kg.m^2
Коэффициент затухания механ. системы (b)	0.1 N.m.s
ЭДС константа (K_T)	0.01 N.m/A
Сопротивление (R)	1Ω
Индуктивность (L)	0.5 H

Перепишем систему (2.4) в матричной форме следующим образом

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{b}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

2.2.2 Система в форме входа-выхода

Линейная модель входа-выхода динамической системы непрерывного времени может быть представлена обыкновенным дифференциальным уравнением вида:

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + \dots + b_n u(t), \quad (2.5)$$

где a_i, b_i – коэффициенты (параметры модели), $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ и n – это порядок модели.

Модель входа-выхода динамической системы дискретного времени имеет следующий вид:

$$y[k+n] + a_1 y[k+n-1] + \dots + a_n y[k] = b_0 u[k+n] + \dots + b_n u[k]. \quad (2.6)$$

2.2.3 Передаточная функция

Определение 7 *Передаточной функцией называется отношение изображения выходного воздействия $Y(s)$ к изображению входного $U(s)$ при нулевых начальных условиях.*

Рассматривая линейное дифференциальное уравнение (2.5) и находя изображение для левой и правой частей уравнения, приходим к общему виду

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}. \quad (2.7)$$

Передаточная функция так же, как и дифференциальное уравнение, полностью определяет динамические свойства системы.

2.3 Основные свойства

2.3.1 Управляемость

Определение 8 ([8]) *Управляемость означает возможность выбора входного сигнала, который позволит перевести систему из начального в конечное состояние за конечный промежуток времени.*

Далее сформулируем алгебраический критерий (Kalman rank condition) управляемости системы. Система будет управляемой тогда и только тогда, когда матрица управляемости Q_c имеет ранг n , то есть

$$\text{rank } Q_c = n,$$

где

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{(n-1)}B \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Пример 2: (Продолжение Примера 1). Из уравнения (2.4) следует, что $n = 2$. Проверим свойство управляемости системы. Согласно (2.8), матрица управляемости выглядит следующим образом

$$Q_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det Q_c = -4 \neq 0$, то $\text{rank } Q_c = 2$ и, следовательно, система (2.4) является полностью управляемой.

2.3.2 Наблюдаемость

Определение 9 ([5]) *Формально, система считается наблюдаемой, если для какой либо последовательности состояний и векторов управления, текущее состояние может быть определено в конечное время, используя только выходные данные. Другими словами, это значит, что с помощью выходных сигналов системы возможно описать поведение всей системы в целом. Если система не наблюдаема, то это означает, что текущие значения некоторых состояний не могут быть определены через выходные датчики.*

Понятие наблюдаемости связано с возможностью определения значений переменных состояния по результатам измерения выходных сигналов.

По аналогии с управляемостью, сформулируем алгебраический критерий наблюдаемости. Система будет наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости Q_o имеет ранг n , то есть

$$\text{rank } Q_o = n,$$

где

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Пример 3: (Продолжение Примера 1). Проверим наблюдаемость системы (2.4). Соответствующая матрица наблюдаемости, согласно (2.9), выглядит следующим образом:

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поскольку $\det Q_o = 1 \neq 0$, то $\text{rank } Q_o = 2$. Таким образом система (2.4) полностью наблюдаема.

2.3.3 Устойчивость

Понятие устойчивости относится к ситуации, когда входные сигналы системы равны нулю, т.е. внешние воздействия отсутствуют. При этом правильно построенная система должна находиться в состоянии равновесия (покоя) или постепенно приближаться к этому состоянию. В неустойчивых системах даже при нулевых входных сигналах возникают собственные колебания и, как следствие – недопустимо большие ошибки. Одним из первых вопросов, возникающих при исследовании и проектировании линейных систем управления, является вопрос об их устойчивости. Линейная система называется устойчивой, если при выведении ее внешними воздействиями из состояния равновесия (покоя) она возвращается в него после прекращения внешних воздействий. Если после прекращения внешнего воздействия система не возвращается к состоянию равновесия, то она является неустойчивой. Для нормального функционирования системы управления необходимо, чтобы она была устойчивой, так как в противном случае в ней возникают большие ошибки.

Определение устойчивости обычно проводят на начальном этапе создания системы управления. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, анализ устойчивости относительно прост. Во-вторых, неустойчивые системы могут быть скорректированы, т.е. преобразованы в устойчивые с помощью добавления специальных корректирующих звеньев [11].

Рассмотрим устойчивость по Ляпунову. Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

Решение $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, системы (2.10), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_i(t_0) = \varphi_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$, называется устойчивым по Ляпунову при $t \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всякого решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, системы (2.10), начальные значения которого удовлетворяют условиям

$$|x_i(t_0) - \varphi_{i0}| < \delta, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.11)$$

имеют место неравенства

$$|x_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.12)$$

для всех $t \geq t_0$.

Если при сколь угодно малом $\delta > 0$ хотя бы для одного решения $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, неравенства (2.12) не выполняются, то решение $\varphi_i(t)$ называется неустойчивым.

Если, кроме выполнения неравенств (2.12) при условии (2.11) выполняется также условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_i(t) - \varphi_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.13)$$

то решение $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, называется асимптотически устойчивым [7].

Хотя теория Ляпунова помогает определить, устойчива система или нет, на практике гораздо удобнее пользоваться алгебраическим критерием. Пусть

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (2.14)$$

является характеристическим полиномом матрицы $(A - \lambda I)$. Непрерывная система устойчива тогда и только тогда, когда действительная часть всех собственных значений корней уравнения (2.14) отрицательна. Таким образом, если хотя бы один корень является положительным, тогда система будет неустойчивой.

По аналогии с непрерывным случаем, можно определить алгебраический критерий устойчивости дискретных систем вида (2.2). Система (2.2) будет устойчивой тогда и только тогда, когда корни характеристического уравнения лежат внутри единичной окружности.

Геометрически область устойчивости непрерывной и дискретной системы может быть изображена как показано на Рис. 2.1.

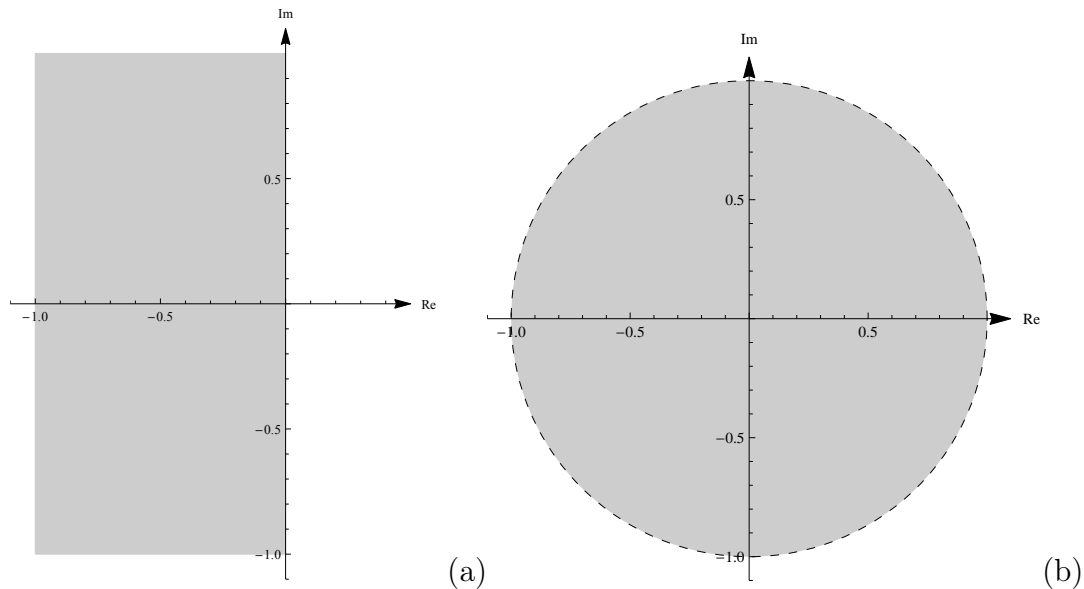


Рис. 2.1: Серым отмечена область устойчивости непрерывных (а) и дискретных (б) систем

Пример 4: (Продолжение Примера 1). Для того, чтобы выяснить, является ли система (2.4) устойчивой, найдем собственные значения матрицы A

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -0.02 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \lambda^2 + 12\lambda + 20.02.$$

Решая данное уравнение, получаем $\lambda_1 = -2.0025$ и $\lambda_2 = -9.9975$. Поскольку $\mathbb{R}(\lambda_1) < 0$ и $\mathbb{R}(\lambda_2) < 0$, то можно сделать вывод, что система (2.4) устойчива.

Глава 3

Дискретизация

В математике, дискретизация связана с трансформацией непрерывных моделей и уравнений в их дискретные аналоги. Этот процесс обычно используется как первый шаг на пути к превращению их в более подходящие для численной оценки и реализации на дигитальных компьютерах.

3.1 Аналитический метод

Для получения дискретной системы рассмотрим систему непрерывного времени (2.1) без уравнения выхода

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t). \quad (3.1)$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At} = e^{At}A.$$

Далее домножим обе части уравнения (3.1) на e^{-At}

$$e^{-At}\dot{x}(t) = e^{-At}Ax(t) + e^{-At}Bu(t),$$

которое может быть переписано следующим образом

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x(t)) = e^{-At}Bu(t). \quad (3.2)$$

Проинтегрируем уравнение (3.2)

$$e^{-At}x(t) - e^0x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

или

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.3)$$

Таким образом мы получили решение уравнения (3.1) в аналитическом виде.

Далее, полагая, что $x[k] := x(kT)$ и значения входного сигнала остаются константными в течение определенного промежутка времени $[kT; (k+1)T)$, перепишем формулу (3.3) следующим образом

$$x[k] = e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.4)$$

Увеличение k на 1 приводит к

$$x[k+1] = e^{A(k+1)T}x(0) + \int_0^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

или же

$$x[k+1] = e^{AT} \left[e^{AkT}x(0) + \int_0^{kT} e^{A(kT-\tau)}Bu(\tau)d\tau \right] + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A(kT+T-\tau)}Bu(\tau)d\tau. \quad (3.5)$$

Заметим, что выражение в квадратных скобках в (3.5) равняется (3.4) и положим $\nu = kT + T - \tau$. Таким образом предыдущее уравнение можно упростить как

$$x[k+1] = e^{AT}x[k] + \left(\int_0^T e^{A\nu}d\nu \right) Bu[k] = e^{AT}x[k] + A^{-1}(e^{AT} - I)Bu[k]. \quad (3.6)$$

Полученная формула описывает точную дискретную модель системы непрерывного времени. Используя обозначения

$$F := e^{AT}, \quad (3.7)$$

$$G := A^{-1}(F - E)B, \quad (3.8)$$

мы приходим к системе дискретного времени в форме (2.2).

Заметим, что при такой схеме дискретизации все свойства системы сохраняются.

Пример 5: (Продолжение Примера 1). Найдем для модели двигателя постоянного тока дискретную модель. Сначала посчитаем собственные значения матрицы A

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -0.02 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow sE - A = \begin{bmatrix} s + 10 & -1 \\ 0.02 & s + 2 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\det(sE - A) = (s + 10)(s + 2) + 0.02 = s^2 + 12s + 20.02 = (s + 2.0025)(s + 9.9975).$$

Теперь воспользуемся методом из [6] для расчета матричной экспоненты.

$$(sE - A)^{-1} = \frac{1}{(s + 2.0025)(s + 9.9975)} \begin{bmatrix} s + 2 & 1 \\ -0.02 & s + 10 \end{bmatrix}.$$

Далее, согласно формуле (3.25) из [6] e^{AT} можно представить следующим образом

$$e^{At} = \frac{e^{\lambda_1 T}}{\lambda_1 + 9.9975} \begin{bmatrix} \lambda_1 + 2 & 1 \\ -0.02 & \lambda_1 + 10 \end{bmatrix} + \frac{e^{\lambda_2 T}}{\lambda_2 + 2.0025} \begin{bmatrix} \lambda_2 + 2 & 1 \\ -0.02 & \lambda_2 + 10 \end{bmatrix}$$

или же

$$e^{At} = e^{-2.0025T} \begin{bmatrix} -0.0003 & 0.1251 \\ -0.0025 & 1.0003 \end{bmatrix} + e^{-9.9975T} \begin{bmatrix} 1.0003 & -0.1251 \\ 0.0025 & 0.0003 \end{bmatrix}.$$

Пусть $T = 0.1$. Тогда, согласно формуле (3.7), мы находим

$$F = \begin{bmatrix} -0.0002 & 0.1024 \\ -0.0020 & 0.8188 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3681 & -0.046 \\ 0.0009 & 0.0001 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3678 & 0.0564 \\ -0.0011 & 0.8189 \end{bmatrix}.$$

Далее, используя (3.8), получаем

$$G = \begin{bmatrix} -0.0999 & -0.05 \\ 0.0009 & -0.4995 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0.3678 & 0.0564 \\ -0.0011 & 0.8189 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0068 \\ 0.1810 \end{bmatrix}.$$

В итоге дискретная модель системы (2.4) выглядит следующим образом

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3678 & 0.0564 \\ -0.0011 & 0.8189 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0068 \\ 0.1810 \end{bmatrix} u[k]. \quad (3.9)$$

Результаты симуляции можно увидеть на Рис. 3.1 для начальных состояний $x_1(0) = -1$ и $x_2(0) = 1$. На Рис. 3.1 символы c и d в названии переменных соответствуют непрерывной и дискретной системам, а $y1$ и $y2$ показывают соответствующие состояния. Переопределяем матрицу C на единичную, чтобы возможно было проанализировать оба состояния системы.

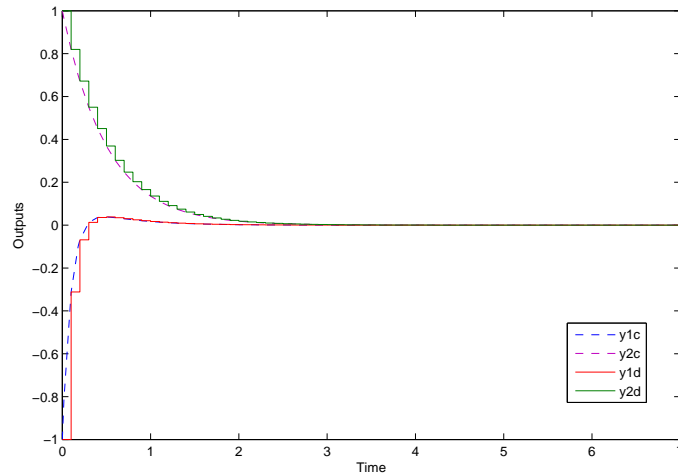


Рис. 3.1: Графики системы непрерывного (2.4) и модели дискретного (3.9) времени

Пример 6: Рассмотрим сервопривод, описанный в [2]. Данные для системы были взяты из [10]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.1577 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 197.1451 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычисления делаем по тому же принципу, как и в предыдущем примере. Находим собственные значения матрицы A

$$sE - A = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 1.1577 \end{bmatrix} \Rightarrow (sE - A)^{-1} = \frac{1}{s(s + 1.1577)} \begin{bmatrix} s + 1.1577 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Получаем e^{AT} в виде

$$e^{AT} = e^0 \begin{bmatrix} 1 & 0.8638 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-1.1577T} \begin{bmatrix} 0 & -0.8638 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Считаем матрицу F согласно формуле (3.7). При шаге $T = 1$ получаем

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.8638 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -0.2714 \\ 0 & 0.3142 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5924 \\ 0 & 0.3142 \end{bmatrix}.$$

Поскольку определитель матрицы A равен нулю, для расчета матрицы G следует воспользоваться формулой (3.6)

$$G := \left(\int_0^T e^{A\tau} d\tau \right) B. \quad (3.10)$$

Для $\lambda_1 = 0$, из (3.10) следует

$$\int_0^T e^0 d\tau = e^0 \int_0^T d\tau = (T - 0) = T$$

и для $\lambda_2 = -1.1577$ получаем

$$\int_0^T e^{A\tau} d\tau = \frac{e^{-1.1577T} - 1}{-1.1577}.$$

Таким образом

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0.8638 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 197.1451 \end{bmatrix} T + \begin{bmatrix} 0 & -0.8638 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 197.1451 \end{bmatrix} \frac{e^{-1.1577T} - 1}{-1.1577}$$

или же (при $T = 1$)

$$G = \begin{bmatrix} 69.4161 \\ 116.7837 \end{bmatrix}.$$

Для $T = 0.1$, матрицы F и G будут иметь следующие значения

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0.0944 \\ 0 & 0.8907 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0.9488 \\ 18.6161 \end{bmatrix}.$$

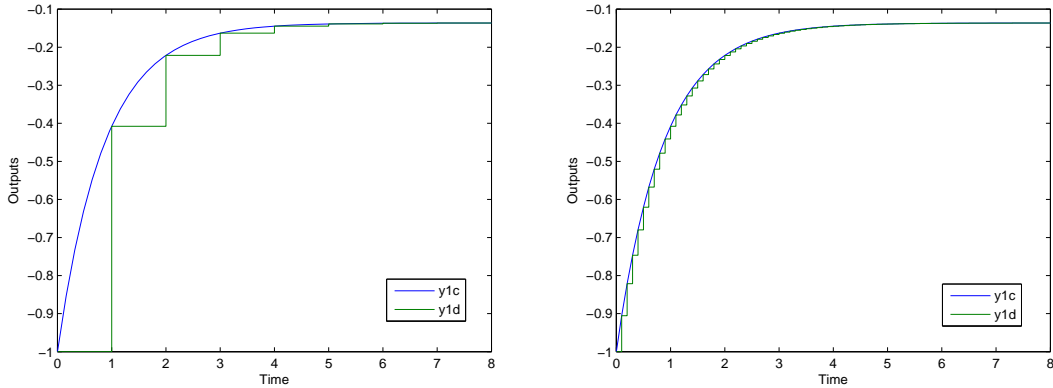


Рис. 3.2: Графики состояния сервопривода при $T = 1$ и $T = 0.1$

Пример 7:

Также посчитаем и передаточную функцию в дискретном времени, данные для системы были взяты из [10]

$$H(s) = \frac{197.1451}{s + 1.1577}.$$

Применяем формулу для дискретизации передаточной функции

$$G(z) = \frac{1 - e^{-AT}}{z - e^{-AT}}. \quad (3.11)$$

Поскольку значение A у нас разное, то применим такую форму записи

$$G(z) = \frac{b_1(1 - e^{-a_1T})}{z - e^{-a_1T}}. \quad (3.12)$$

Согласно формуле (3.12), считаем передаточную функцию при $T = 1$

$$G(z) = \frac{\frac{197.1451}{1.1577}(1 - e^{-1.1577})}{z - e^{-1.1577}} = \frac{116.8}{z - 0.3142}.$$

При $T = 0.1$, значение будет равно

$$G(z) = \frac{\frac{197.1451}{1.1577}(1 - e^{-0.1158})}{z - e^{-0.1158}} = \frac{18.62}{z - 0.8907}.$$

Результаты симуляции представлены на Рис. 3.3

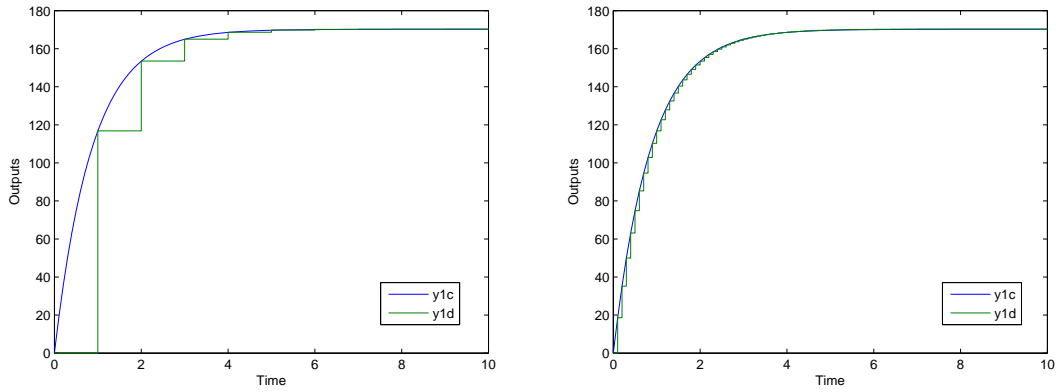


Рис. 3.3: Графики передаточной функции сервопривода при $T = 1$ и $T = 0.1$

3.2 Метод Эйлера

Метод Эйлера¹ является простейшим способом приближенного решения дифференциальных уравнений. Его графическая интерпретация изображена на Рис. 3.4

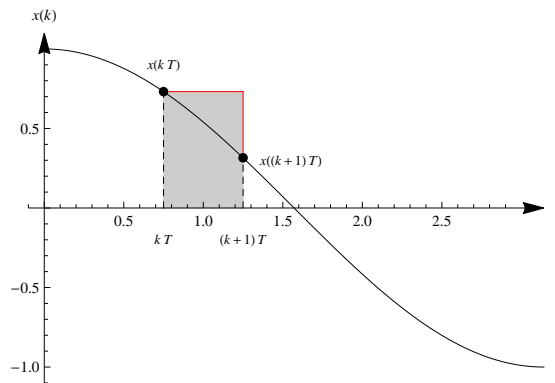


Рис. 3.4: Геометрическая иллюстрация метода Эйлера

Рассмотрим систему (3.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t).$$

Воспользуемся определением производной функции, которое можно сформулировать следующим образом

$$\dot{x}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{при } \Delta t = T. \quad (3.13)$$

Далее, используя правую часть (3.13) и подставляя её в (3.1), получаем следующее соотношение

¹По другому еще называется методом ломаных, так как участки кривой функции заменяются отрезками прямых.

$$\frac{x[k+T] - x[k]}{T} = Ax[k] + Bu[k]. \quad (3.14)$$

Заметим, что геометрически область устойчивости системы (3.14) выглядит как показано на Рис. 3.5.

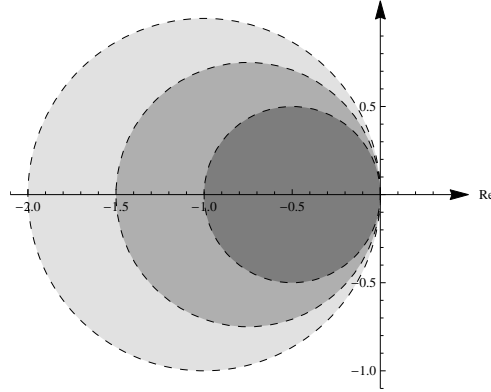


Рис. 3.5: Серыми цветами обозначены области устойчивости для системы (3.14) с шагами $T = 2$ (малый круг), $T = 1\frac{1}{3}$ (средний круг) и $T = 1$ (большой круг)

Описание дискретной системы, опирающееся на оператор сдвига вперед, можно получить из описания системы, основанная на разностном операторе путем домножения уравнения (3.14) на T и перенесением $x[k]$ в правую часть

$$x[k+T] = \underbrace{(I + TA)}_{\tilde{A}} x[k] + TBu[k]. \quad (3.15)$$

Пример 8: Рассмотрим систему из [3]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x. \quad (3.16)$$

Дискретизируем систему по методу Эйлера

$$\frac{x[k+T] - x[k]}{T} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x[k]. \quad (3.17)$$

Найдем собственные значения системы (3.16)

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} -5 - \lambda & -4 \\ 2 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3,$$

которые равны $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -3$. Теперь проверим свойство устойчивости полученной дискретной системы при разных шагах дискретизации. При $T = \frac{1}{2}$ и $T = 2$, радиусы области устойчивости будут, соответственно, равны 2 и $\frac{1}{2}$. На Рис. 3.6 изображены соответствующие (светлая и темная) области. Также красными точками отмечены собственные значения системы.

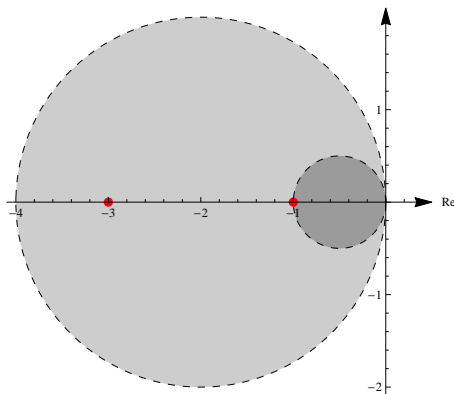


Рис. 3.6: Геометрическая интерпретация устойчивости системы (3.14) с шагами $T = \frac{1}{2}$ и $T = 2$

Из Рис. 3.6 видно, что при $T = \frac{1}{2}$ система будет устойчивой, так как собственные значения попадают в область устойчивости. Однако при $T = 2$ система теряет свойство устойчивости. Легко посчитать, что предельным значением будет $T = \frac{2}{3}$.

Преобразуем систему (3.16) к виду (3.15). Находим собственные значения при $T = \frac{1}{2}$

$$\tilde{A} = (I + TA) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2.5 & -2 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -1.5 & -2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix},$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -1.5 & -2 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} -1.5 - \lambda & -2 \\ 1 & 1.5 - \lambda \end{bmatrix} \right) = (\lambda + 0.5)(\lambda - 0.5).$$

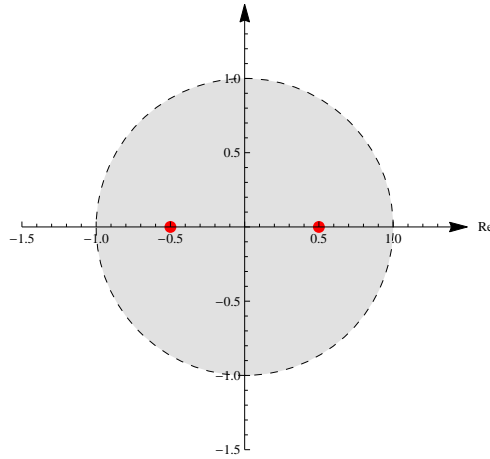


Рис. 3.7: Расположение полюсов при $T = \frac{1}{2}$

Аналогично посчитаем собственные значения при $T = 2$

$$\tilde{A} = (I + TA) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & -8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\det \left(\begin{bmatrix} -9 & -8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} -9 - \lambda & -8 \\ 4 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 5).$$

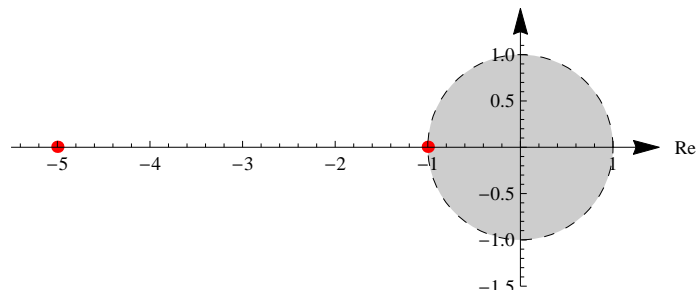


Рис. 3.8: Расположение полюсов при $T = 2$

Таким образом, мы проиллюстрировали эквивалентность подходов для определения свойства устойчивости системы, опирающееся на классическое описание (в терминах оператора сдвига вперед) и основанное на разностном операторе.

Замечание 1 Матричную экспоненту e^{AT} из выражения (3.7) можно аппроксимировать при помощи следующего выражения

$$e^{AT} \approx (I + AT). \quad (3.18)$$

Заметим, что (3.18) эквивалентно методу Эйлера.

3.3 Метод Тастина

Метод Тастина, или же билинейное преобразование используется для преобразования системы непрерывного времени к системе дискретного времени. Метод Тастина в конечном счете соответствует повторному применению формулы трапеций для вычисления интеграла. Площадь трапеций находится как произведение полусуммы оснований на высоту.

Графическая интерпретация метода Тастина изображена на Рис. 3.9.

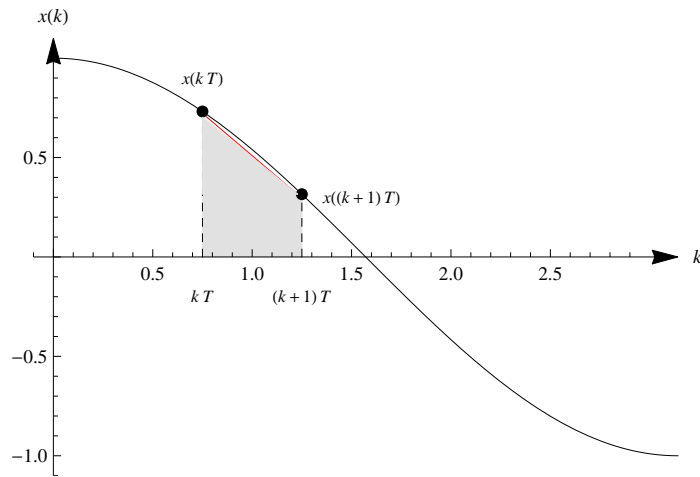


Рис. 3.9: Геометрическая иллюстрация метода Тастина

Используя преобразование Тастина, дифференциальный оператор s можно аппроксимировать следующим образом

$$s \approx \frac{2z - 1}{Tz + 1}. \quad (3.19)$$

которая называется преобразованием Тастина.

Рассмотрим первое уравнение из (3.1)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

в котором заменим дифференциальный оператор s на выражение (3.19), получим

$$\frac{z - 1}{z + 1}x(t) = \frac{T}{2}Ax(t) + \frac{T}{2}Bu(t),$$

используя элементарные алгебраические преобразования, получим

$$x[k + 1] - x[k] = \frac{T}{2}A(x[k + 1] + x[k]) + \frac{T}{2}B(u[k + 1] + u[k]),$$

которое соответствует

$$(I - A\frac{T}{2})x[k + 1] = (I + A\frac{T}{2})x[k] + \frac{T}{2}B(u[k + 1] + u[k]).$$

В конечном итоге получаем

$$x[k + 1] = \underbrace{(I - \frac{T}{2}A)^{-1}(I + \frac{T}{2}A)}_{\tilde{A}}x[k] + \underbrace{(I - \frac{T}{2}A)^{-1}\frac{T}{2}B}_{\tilde{B}}(u[k + 1] + u[k]). \quad (3.20)$$

При использовании этого метода происходит достаточно точная дискретизация с сохранением всех свойств системы.

Пример 9: Рассмотрим передаточную функцию сервопривода из [10]

$$H(s) = \frac{197.1451}{s + 1.1577}.$$

Используя формулу (3.19), получим следующее выражение

$$G(z) = \frac{197.1451}{\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} + 1.1577} = \frac{197.1451T(z+1)}{2(z-1) + 1.1577T(z+1)}. \quad (3.21)$$

Полагая $T = 1$ в (3.21), получаем

$$G(z) = \frac{197.1451z + 197.1451}{3.1577z - 0.8423} = \frac{62.43z + 62.43}{z - 0.2667}.$$

Таким же образом находим передаточную функцию для $T = 0.1$

$$G(z) = \frac{9.318z + 9.318}{z - 0.8906}.$$

На Рис. 3.10 можно увидеть результаты симуляции.

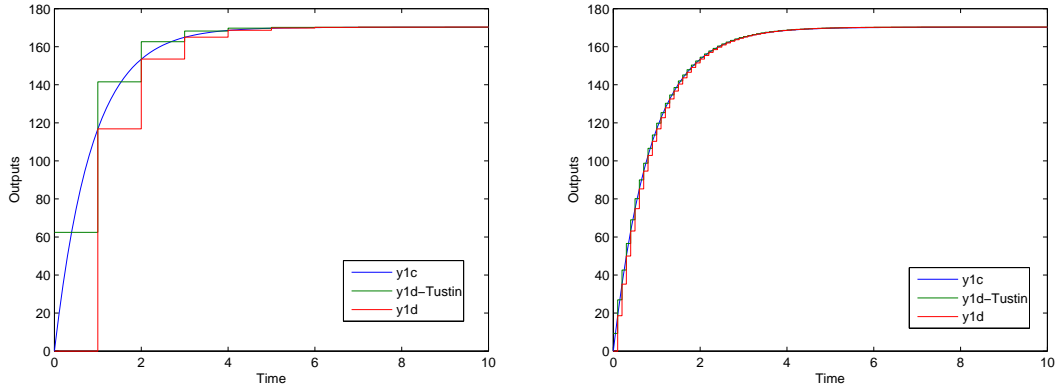


Рис. 3.10: Результаты симуляций системы. Графики состояния сервопривода при $T = 1$ и $T = 0.1$

Пример 10: Рассмотрим систему из [3]

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Далее, используя формулу (3.20), дискретизируем систему и находим собственные значения при $T = 0.5$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.25 & -1 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.25 & -1 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} -0.3143 & -0.9143 \\ 0.4571 & 1.0571 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{bmatrix} -0.3143 & -0.9143 \\ 0.4571 & 1.0571 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{bmatrix} -0.3143 - \lambda & -0.9143 \\ 0.4571 & 1.0571 - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (\lambda - 0.1429)(\lambda - 0.6). \end{aligned}$$

Таким же образом находим собственные значения при $T = 2$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}, \\ \det \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) &= \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 0.5 & 0.5 - \lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 0.5). \end{aligned}$$

Собственные значения находятся внутри единичной окружности. Как и ожидалось, при методе Тастина свойство устойчивости сохраняется, в то время как при методе Эйлера при шаге $T = 2$ система становится неустойчивой, см. Пример 7.

Замечание 2 Матричную экспоненту e^{AT} из выражения (3.7) можно аппроксимировать при помощи следующего выражения

$$e^{AT} \approx \left(I + \frac{1}{2}AT \right) \left(I - \frac{1}{2}AT \right)^{-1}. \quad (3.22)$$

Заметим, что (3.22) эквивалентно методу Тастина.

Заключение

В ходе исследования были описаны все основные понятия и свойства систем. Далее была проведена обширная работа с теоретическим материалом, что позволило достаточно подробно рассмотреть основные методы дискретизации. Также был детально рассмотрен и проиллюстрирован каждый из методов на конкретных примерах.

Перечислим основные преимущества и недостатки каждого из методов дискретизации.

Метод точной дискретизации:

- + дает точную дискретную модель (основан на аналитическом решении);
- + сохраняет все свойства системы;
- достаточно ресурсоемкий (вычисления занимают долгое время).

Метод Эйлера:

- + с вычислительной точки зрения, проще остальных методов;
- + при малом шаге дискретизации дает достаточно точную дискретную модель;
- при неправильно выбранном шаге дискретизации нарушается свойство устойчивости.

Метод Тастина:

- + вычисления быстрее, нежели при методе точной дискретизации;
- + сохраняются все свойства системы;
- дает приближенную дискретную модель.

Данная работа закладывает фундамент для дальнейших исследований. В работе было проанализировано лишь одно свойство – устойчивость. Схожим образом можно проделать анализ и для других свойств системы. В дальнейшем мы планируем уделить внимание управляемости и наблюдаемости при использовании метода Эйлера. Также планируем рассмотреть другие методы и классифицировать тип задач, где тот или иной метод подходит лучше.

В дальнейшем для того, чтобы анализировать свойство получаемых дискретных моделей, мы планируем использовать формализм временных шкал. Такой подход позволяет гораздо глубже проанализировать взаимосвязи между системами, определенными в разных временных областях. Помимо классических непрерывных и дискретных моделей, временные шкалы включают в себя также системы, определенные на негомогенной дискретной шкале, гибридные системы и так далее [4].

Литература

- [1] DC motor speed: System modeling. [Онлайн; доступен 15.03.2015] <http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed§ion=SystemModeling>.
- [2] INTECO modular servo. [Онлайн; доступен 28.04.2015] <http://www.inteco.com.pl/products/modular-servo/>.
- [3] Z. Bartosiewicz, E. Piotrowska, and M. Wyrwas. *Stability, stabilization and observers of linear control systems on time scales*. The 46th IEEE Conference on Decision and Control, New Orleans, LA, USA, pp. 2803-2808, December 2007.
- [4] M. Bohner and A. Peterson. *Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*. Boston, USA, 2001.
- [5] K. Ogata. *Modern control engineering*. Upper Saddle River, N.J: Prentice-Hall, fourth edition, 2002.
- [6] H. Sillamaa. *ISS0010 Süsteemiteooria. Neljas trükk*. TTÜ kirjastus, 1999.
- [7] Б. П. Демидович. *Лекции по математической теории устойчивости*. 3-е издание. 2008.
- [8] В. И. Зубов. *Лекции по теории управления*. Москва, Наука, 1975.
- [9] В. С. Анищенко. *Сложные колебания в простых системах*. Москва, Наука, 1990.
- [10] И. Брагин. Модулярная сервосистема: Идентификация и управление в реальном времени. Tallinn, TTU, 2014.
- [11] К. К. Васильев. Теория автоматического управления (следящие системы), 2-ое издание, 2001. [Онлайн; доступен 11.03.2015] http://tk.ulstu.ru/lib/books/tau_1.pdf.