ТАЛЛИННСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет инфотехнологии

Институт автоматики

Вячеслав Евсеев

Управление нелинейной системой на основе методов дробного исчисления

Магистерская работа

Руководители: Эдуард Петленков,

Алексей Тепляков

Институт автоматики,

Таллиннский технический университет

ТАЛЛИНН 2013

Декларация: настоящим заявляю, что данная магистерская работа является результатом моей самостоятельной работы, представлена в Таллиннский технический университет для получения магистерской степени, и ранее не была использована для соискания академической степени.

Deklareerin, et käesolev magistritöö, mis on minu iseseisva töö tulemus, on esitatud Tallinna Tehnikaülikooli magistrikraadi taotlemiseks ja selle alusel ei ole varem taotletud akadeemilist kraadi.

Declaration: I hereby declare that this master's thesis, my original investigation and achievement, submitted for the master's degree at Tallinn University of Technology, has not been submitted for any degree or examination.

Вячеслав Евсеев

Содержание

Аннс	отация	I		5	
Kokk	uvõte			6	
Abstr	act			7	
1	Введ	ение		8	
	1.1	Исчисл	ения дробного порядка	8	
	1.2	Структ	ура	10	
2	Прои	ізводная	дробного порядка в теории систем	11	
	2.1	Матема	тические основы дробных исчислений	11	
		2.1.1	Определения	11	
		2.1.2	Свойства	12	
	2.2	Преобр	азование Лапласа	12	
	2.3	Модели	и дробного порядка	13	
	2.4	Анализ	системы дробного порядка	14	
		2.4.1	Устойчивость	14	
		2.4.2	Анализ во временной области	15	
		2.4.3	Анализ в частотной области	15	
	2.5	Аппрок	симация дробных операторов	16	
3	Иден	тифика	ция	17	
	3.1	Основы идентификации			
	3.2	Иденти	фикация во временной области	18	
4	Конт	роллер Д	дробного порядка	21	
	4.1	PID контроллер дробного порядка			
	4.2	Влияние управляющеего воздействия на поведение управляемой системь 2			
	4.3	Настро	йка и оптимизация	23	
5	Прог	раммны	й пакет FOMCON	25	
	5.1	Обзор и	инструментов FOMCON	25	
		5.1.1	Главный модуль	26	
		5.1.2	Модуль идентификации	27	
		5.1.3	Модуль управления	29	
			5.1.3.1 Инструмент оптимизации	30	

			5.1.3.2	Настройка целочисленного PID	
	5.2	Новая фу	нкция ид	дентификации	
		5.2.1 I	Тример п	применения новой функции	
6	Прак	тическое	примене	ние	
	6.1	Описани	е управля	яемого объекта	
	6.2	Методы і	идентифи	икации	41
		6.2.1 I	Ідентифі	икация одного сосуда	41
		6.2.2 I	Ідентифі	икация системы сдвоенных сосудов	
	6.3	Методы	управлен	ия	60
		6.3.1 I	Троектир	оование регулятора для одного сосуда	60
		6.3.2 I	Троектир	оование регулятора для системы сосудов	63
	6.4	Описани	е экспери	иментального управляемого объекта	67
	6.5	Идентиф	икация э	кспериментального управляемого объекта	a70
	6.6	Управлен	ние экспе	ериментальным объектом	77
7	Вывс	оды и закл	ючение.		
Лите	ратур	a			

Аннотация

Управление нелинейной системой на основе методов дробного исчисления

Данная работа посвящена применению производной дробного порядка при идентификации нелинейной системы, а также созданию системы управления для нелинейной динамической системы дробного порядка. В первой части работы читатель может ознакомиться с теоретическими основами дробной производной, её применением в теории систем, идентификации и управлении системой. В последующих частях будет рассмотрен FOMCON ("Fractional-order Modeling and Control") – инструмент для идентификации систем дробного порядка и создания дробных систем управления, и его применение. Также в работе предложены методы улучшения работы FOMCON и их практическое применение для идентификации. В завершение будет создана система управления нелинейным объектом. сообщающихся представленным системой сосудов, ИЗ двух также а экспериментальной системой.

Все использованные в данной работе вычисления, симуляции и алгоритмы сделаны в среде MATLAB/FOMCON.

Kokkuvõte

Mittelineaarse süsteemi juhtimine murrulistel tuletistel põhinevate meeto ditega

Antud töö on puhendatud murruliste tuletiste kasutusele mittelineaarse süsteemi tuvastamisel ning regulaatori loomisele murrulise järgu mittelineaarse dünaamilise süsteemi juhtimiseks. Esimeses osas lugeja võib tutvuda murrulise tuletise teoreetilise alusega ja selle rakendusega süsteemiteoorias, identifitseerimises ja süsteemi haldamises. Järgnevates osades vaadeldakse FOMCON ("Murdjärku modelleerimine ja juhtimine") – vahend murdjärku süsteemide identifitseerimiseks ja fraktsionaalse juhtimissüsteemide loomiseks, ning tema rakendus. On ka pakutud meetodeid FOMCON'i parandamiseks ja nende praktilise rakendust identifitseerimise jäoks. Lõpuks luuakse mittelineaarse objekti juhtimissüsteem. Objekt on esitatud kahe ühendatud anumate süsteemiga ja eksperimentaalse süsteemiga.

Kõik kasutatud selles töös arvutused, simulatsioonid ja algoritmid on tehtud MATLAB/FOMCON keskkonnas.

Abstract

Control of Nonlinear System with Fractional Calculus based Methods

This work is devoted to application of Fractional Derivative in the identification of nonlinear system as well as creation of a control system for nonlinear dynamical system of fractional order. In the first part of the work reader is referred to the theoretical foundations of fractional derivative and its applications to the theory of systems, identification and system control. In subsequent parts will be considered FOMCON ("Fractional-order Modeling and Control")—a tool for the identification of fractional order systems and the creation of fractional control systems, and its application. There will also be proposed methods for improving the work of FOMCON and their practical application for identification. Finally, the control system will be established for the nonlinear object represented by a system of two coupled tanks and also an experimental system.

All used in this paper calculations, simulations, and algorithms are made in an environment MATLAB / FOMCON.

1 Введение

1.1 Исчисления дробного порядка

К появлению названия дробное исчисление привёл вопрос: Может ли быть расширен смысл целочисленной производной $d^n y/dx^n$, если показатель степени n – дробь? Затем также возник вопрос: Может ли показатель степени *n* быть любым числом: дробным, иррациональным, или комплексным? На этот вопрос был дан утвердительный ответ, что привело к появлению названия интегрирование и дифференцирование произвольного порядка, которое заменило название дробное *исчисление*. Когда Лейбниц изобрел обозначения $d^n y/dx^n$, это выглядело, на первый взгляд, как игра с символами. Однако эти символы побудили Лопиталя в 1695 году задать Лейбницу вопрос: «Что, если $n = \frac{1}{2}$?». Лейбниц ответил, что пока никто не знает пользы от применения дробных показателей, но в один прекрасный день появятся полезные последствия. С того времени многие известные математики, такие как Эйлер, Лагранж, Лапласе, Фурье и другие, занимались данным вопросом. Но только в конце девятнадцатого века, когда теория обобщённых операторов, связанная с теорией дробных исчислений, достигла соответствующего уровня своего развития, появилась возможность использования интегрирования и дифференцирования произвольного порядка [1].

Рост применения дробного исчисления стал наблюдаться в последнем десятилетии прошедшего двадцатого века. Он был стимулирован в основном использованием инженерных приложений в таких областях, как управление с обратной связью, теория систем и обработка сигналов.

В теории управления феномен дробного исчисления позволяет описывать реальный объект более точно, чем классические «целочисленные» методы. Ранее использование только целочисленных моделей было обусловлено отсутствием эффективных методов решения дробных дифференциальных уравнений. В настоящее время существует много методов апроксимации производной и интеграла дробного порядка, и поэтому дробное исчисление легко может быть использовано в различных инженерных приложениях, например MATLAB [2].

Для решения задач управления, использующих дробное интегрирование и дифференцирование при описании модели управляемой системы, были разработаны

различные инструменты MATLAB, такие как CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier, что означает робастное управление нецелечисленного порядка).

Одним из свойств инструмента CRONE является основанная на частотной области методология, использующая дифференцирование дробного порядка, как проектный параметр высокого уровня. Управление при помощи CRONE было предложено Осталупом, который изучал использующиеся для управления динамическими системами алгоритмы дробного порядка. Также Осталуп предложил идентификацию дробных систем на основе *методов ошибки уравнения (Equation error methods)*, которые основаны, в свою очередь, на использовании техники оптимизации *линейного наименьшего квадрата (Linear Least Square)*. Этот метод состоит в замене непрерывных дробных производных их дискретной аппроксимацией Грюнвальда. В данной работе будут применяться *методы ошибки выхода (Output error methods)*, которые обеспечивают оценку коэффициентов и порядков дифференцирования, используя *технику нелинейной оптимизаци (Nonlinear Optimization Techniques)*, такую как алгоритм Марквардта. Процедура состоит в основия выхода [3].

Для идентификации управляемой системы моделью дробного порядка в этой работе будет использоваться новый инструмент MATLABa FOMCON [4]. Этот инструмент построен на основе существующих инструментальных средств MATLABa и предоставляет новую функциональность, удобство использования различных функций и утилит, а также набор графических интерфейсов пользователя.

Данная работа будет посвящена идентификации при помощи средств FOMCON нелинейной системы, обладающей дробной дифференциальной динамикой, а также улучшению процесса идентификации. Это улучшение поможет уменьшить участие человека и снизить время, затрачиваемое на идентификацию систем. В заключении, на основе данных идентификации будет настроен PID регулятор, подтверждающий эффективность использования интегрирования и дифференцирования произвольного порядка в задачах управления. При разработке регулятора, как и при идентификации, применяется оптимизация, основанная на минимизации ошибки на выходе системы. Также при оптимизации учитываются значения *запаса устойчивости по амплитуде (gain margin)* и *фазе (phase margin)* системы открытого контура, что позволяет добиться устойчивого управления.

1.2 Структура

Данная работа организована следующим образом. Во второй главе читатель будет ознакомлен с математической концепцией исчислений дробного порядка и её применением в теории систем. Здесь также будут затронуты модели дробного порядка и их анализ. Без внимания не останется и аппроксимация систем дробного порядка фильтрами целочисленного порядка.

В третьей главе будут рассмотрены основы идентификации и методы идентификации динамических систем дробного порядка во временной области.

Четвёртая глава представит читателю обзор регулятора дробного порядка. Здесь также описывается влияние управляющего воздействия такого регулятора на управляемую систему и настройка регулятора данного типа.

В пятой главе будет рассмотрен FOMCON и его инструменты. Будут предложены новые методы, которые могут улучшить его работу.

Шестая глава расскажет о практическом применении предложенных алгоритмов идентификации И методов управления на примере управления моделью сообщающихся сосудов и реальным экспериментальным объектом. Будут представлены возможности инструмента оптимизации PID регулятора дробного порядка.

В последней главе будет сделан общий обзор результатов работы и показана перспектива продолжения дальнейшей работы.

2 Производная дробного порядка в теории систем

В данной главе будет рассмотрена математическая основа исчислений дробного порядка и их применение в теории систем. Эта глава организована следующим образом. В части 2.1 даны определения дробного оператора с его свойствами. Часть 2.2 содержит определение преобразования Лапласа для операторов дробного порядка. В части 2.3 даны виды моделей дробных систем. Основы анализа системы дробного порядка во временной и частотной областях описаны в части 2.4. С методом апроксимации системы дробного порядка целочисленной моделью можно ознакомиться в части 2.5.

2.1 Математические основы дробных исчислений

Исчисления дробного порядка являются обобщением обычного интегрирования и дифференцирования к оператору нецелочисленного прядка ${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}$, где *a* и *t* – пределы операции, α – дробный порядок. Непрерывный оператор интегрирования и дифференцирования дробного порядка определяется следующим образом:

$${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha} = \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}t^{\alpha}} & \Re(\alpha) > 0, \\ 1 & \Re(\alpha) = 0, \\ \int_{a}^{t} (\mathrm{d}\tau)^{-\alpha} & \Re(\alpha) < 0, \end{cases}$$
(2.1)

где $\alpha \in \mathbb{R}$, α также может быть комплексным числом [2].

2.1.1 Определения

Обычно для обобщённого дробного дифференцирования используются два определения.

Определение 2.1.1 Дробный оператор по Грюнвальду – Летникову

$${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{t-\alpha}{h} \right\rfloor} (-1)^{j} {\alpha \choose j} f(t-jh),$$

$$(2.2)$$

где [·] означает целую часть [5].

Наравне с определением по ГЛ применяется определение дифференцирования дробного порядка по Риману – Лиувиллю.

Определение 2.1.2 Дробный оператор по Риману – Лиувиллю

$${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^{m}}{\mathrm{d}t^{m}} \int_{0}^{t} \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} \mathrm{d}\tau,$$
(2.3)

где $m - 1 < \alpha < m, m \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}^+$ и $\Gamma(\cdot)$ - гамма функция Эйлера [5].

2.1.2 Свойства

Дифференцирование дробного порядка обладает следующими свойствами [5, 2, 6, 12]:

- 1. Если f(t) аналитическая функция, тогда производная дробного порядка ${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t)$ также является аналитической по отношению к *t*.
- 2. Если $\alpha = n$ и $n \in Z^+$, тогда оператор ${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}$ может интерпретироваться, как «классический» оператор $\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}$.
- 3. Оператор порядка $\alpha = 0$ идентичен операции ${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t) = f(t)$.
- 4. Дифференцирование дробного порядка линейно:

$${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}[af(t)+bg(t)] = a_{0a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t)+b_{0a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}g(t), \qquad (2.4)$$

если а и b – константы.

5. Для операторов дробного порядка с $\Re(\alpha) > 0$ и $\Re(\beta) > 0$ при разумных ограничениях функции *f*(*t*) справедлив закон сложения показателей степени:

$${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}\Big[{}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\beta}f(t)\Big] = {}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\beta}[{}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t)] = {}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha+\beta}f(t).$$
(2.5)

 Производная дробного порядка заменяет производную целочисленного порядка:

$$\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}\left({}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t)\right) = {}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}\left(\frac{\mathrm{d}^{n}f(t)}{\mathrm{d}t^{n}}\right) = {}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha+n}f(t), \qquad (2.6)$$

при условии t = a у нас есть $f^{(k)}(a) = 0$, (k = 0, 1, 2, ..., n - 1).

2.2 Преобразование Лапласа

Преобразование Лапласа является важнейшим инструментом в проектировке динамических систем. Функция *F*(*s*) комплексной переменной *s* называется

изображением Лапласа функции f(t), которая называется оригиналом. Преобразование Лапласа определяется следующим образом:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$
(2.7)

Оригинал f(t) можно восстановить из преобразования Лапласа F(s) с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds,$$
 (2.8)

где c больше, чем вещественная часть всех полюсов функции F(s) [6].

Теперь можно определить преобразование Лапласа для дифференцирования дробного порядка. В случае нулевых начальных условий для определений Грюнвальда-Летникова (2.2) и Римана-Лиувилля (2.3) преобразование Лапласа будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{L}[\mathcal{D}^{\alpha}f(t)] = s^{\alpha}F(s). \tag{2.9}$$

2.3 Модели дробного порядка

Непрерывная динамическая система дробного порядка может быть выражена дробным дифференциальным уравнением следующей формы [2]:

$$a_{n}\mathcal{D}^{\alpha_{n}}y(t) + a_{n-1}\mathcal{D}^{\alpha_{n-1}}y(t) + \dots + a_{0}\mathcal{D}^{\alpha_{0}}y(t) =$$

$$b_{m}\mathcal{D}^{\beta_{m}}u(t) + b_{m-1}\mathcal{D}^{\beta_{m-1}}u(t) + \dots + b_{0}\mathcal{D}^{\beta_{0}}u(t).$$
(2.10)

У системы существует *общий* порядок, если в (2.10) все порядки производных являются целыми кратными базового порядка q, так что α_k , $\beta_k = kq$, $q \in \mathbb{R}^+$.

Применив преобразование Лапласа к (2.10) при нулевых начальных условиях, входное-выходное представление системы дробного порядка может быть получено в виде передаточной функции:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}.$$
 (2.11)

В случае системы с общим порядком *q* передаточная функция непрерывного времени дана в виде:

$$G(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k(s^q)^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k(s^q)^k} .$$
(2.12)

Взяв $\lambda = s^q$ и сделав замену в функции (2.12) , получим псевдорациональную функцию $H(\lambda)$:

$$H(\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k} .$$
(2.13)

2.4 Анализ системы дробного порядка

2.4.1 Устойчивость

Для определения критерия устойчивости системы дробного порядка, данной в виде (2.10), используется следующая теорема [2, 9, 11]:

Теорема 2.4.1 (*Теорема устойчивости Матиньона*) Передаточная функция дробного порядка G(s) = Z(s)/P(s) устойчива, если, и только если, выполняются следующие условия в σ -плоскости:

$$|\arg(\sigma)| > q\frac{\pi}{2}, \quad \forall \sigma \in C, \quad P(\sigma) = 0,$$
 (2.14)

где $\sigma = s^q$. Когда $\sigma = 0$ является единственным корнем P(s), система не может быть устойчивой. Для q = 1 это классическая теорема расположения полюсов на комплексной плоскости: нет полюсов на замкнутой правой плоскости первого листа римановой поверхности.

Примечание 2.4.1 В отличии от систем целочисленного порядка, устойчивая непрерывная система дробного порядка может иметь полюса в правой половине комплексной плоскости.



Рис. 2.1: Область устойчивости для LTI системы дробного порядка при 0 < q < 1

2.4.2 Анализ во временной области

Во временной области желательно получение переходной характеристики динамической системы дробного порядка. Решением для этого является вычисление производной дробного порядка, которое производится при помощи определения Грюнвальда – Летникова (2.2), изменённого следующим образом:

$${}_{a}\mathcal{D}_{t}^{\alpha}f(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\left[\frac{t-a}{h}\right]} w_{j}^{(\alpha)} f(t-jh), \qquad (2.15)$$

где h – размер шага вычисления и $w_j^{(\alpha)} = (-1)^j {\alpha \choose j}$, что может быть вычислено рекурсивно из:

$$w_0^{(\alpha)} = 1, \qquad w_j^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{\alpha + 1}{j}\right) w_{j-1}^{(\alpha)}, \qquad j = 1, 2, \dots$$
 (2.16)

2.4.3 Анализ в частотной области

Частотный отклик может быть получен путем подстановки $s = j\omega$ в (2.11). Комплексный отклик системы при частоте $\omega \in (0; \infty)$ может быть затем получен следующим образом:

$$R(\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^{\beta_m} + b_{m-1} (j\omega)^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 (j\omega)^{\beta_0}}{a_n (j\omega)^{\alpha_n} + a_{n-1} (j\omega)^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 (j\omega)^{\alpha_0}},$$
 (2.17)

где *j* - мнимая единица.

2.5 Аппроксимация дробных операторов

В связи с доступностью хорошо зарекомендовавших себя инструментов анализа LTI систем целочисленного порядка, появляется необходимость возможности аппроксимации модели дробного порядка целочисленной моделью [13]. Одним из таких методов является рекурсивный метод Осталупа [14], который даёт очень хорошую аппроксимацию дробных операторов в определённом диапазоне частот и широко используется в дробных исчислениях.

Для диапазона частот (ω_b, ω_h) и порядка *N* фильтр для оператора $s^q, 0 < q < 1$, задан:

$$G_j(s) = K \prod_{k=-N}^N \frac{s + \omega'_k}{s + \omega_k},$$
(2.18)

где

$$\omega_{k}' = \omega_{b} \left(\frac{\omega_{h}}{\omega_{b}}\right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1-q)}{2N+1}}, \qquad \omega_{k} = \omega_{b} \left(\frac{\omega_{h}}{\omega_{b}}\right)^{\frac{k+N+\frac{1}{2}(1+q)}{2N+1}}, \qquad K = \omega_{h}^{q}.$$
(2.19)

При использовании данного метода аппроксимации дробного оператора становится возможным применение общего метода аппроксимации модели дробного порядка целочисленной моделью. Таким образом, для дробного порядка *α* ≥ 1 справедливо:

$$s^{\alpha} = s^n s^q , \qquad (2.20)$$

где $n = \alpha - q$ обозначает целую часть показателя α и s^q получено аппроксимацией Осталупа при использовании (2.18).

3 Идентификация

Эта глава посвящена идентификации системы моделью дробного порядка. В части 3.1 рассматриваются основы идентификации. Часть 3.2 рассказывает о методах идентификации динамической системы во временной области.

3.1 Основы идентификации

Целью идентификации является определение предположительной модели динамической системы. Построение модели проводится на основе данных, собранных путем измерений во время эксперимента. Другими словами, необходимо получить соотношения между входами и выходами системы при воздействии на неё внешних входных сигналов для того, чтобы определить поведение системы, которое описывается моделью. Схема такой системы (один вход – один выход и помехи), используемой для идентификации, показана на Рис. 3.1:



Рис. 3.1: Система со входом и выходом у, измеряемой помехой d и неизмеряемой помехой w

Процедура идентификации системы состоит из следующих шагов [4], [8]:

- Провести эксперимент. Обычно для динамических систем записываются данные переходного процесса во временной области при помощи подачи на вход определённого набора сигналов.
- 2. Записать экспериментальные данные.
- 3. Выбрать набор моделей и/или структуру модели, а также соответствующий критерий оценки модели.
- 4. Вычислить модель, используя подходящий алгоритм, например, метод наименьших квадратов (least squares method).
- 5. Подтвердить полученную модель, Для идентификации и подтверждения желательно использовать два различных набора данных.

 Если модель подходит, её можно использовать в соответсвующих целях. В противном случае пересмотреть стратегию моделирования/идентификации и повторить предыдущие шаги.

3.2 Идентификация во временной области

Целью идентификации во временной области является получение модели дробного порядка в форме (2.11):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}.$$

Данная модель получается при помощи записанных данных со входа и выхода идентифицируемой системы.

Для идентификации могут использоваться различные подходы, такие как *метод* ошибки уравнения (Equation error method) и метод ошибки выхода (Output error method) [3, 15]. Последний будет применяться в этой работе. На его основе предлагается улучшить процесс идентификации.

При запуске процесса идентификации необходимо наличие начальной предполагаемой модели (*Initial guess model*). Эта модель выбирается путём подбора общего порядка q. Полином дробного порядка с псевдопорядком n для начальной модели будет иметь наивысший дифференциальный порядок $n \cdot q$.

Общий порядок q выбирается согласно критерию устойчивости [15] систем дробного порядка. Передаточная функция дробного порядка G(s) с ограниченным входом и ограниченным выходом (BIBO: bounded input – bounded output) устойчива, если [4, 9]:

$$0 < q < 2, \tag{3.1}$$

где q – общий порядок, и для каждого полюса s^q (для $G(s) s_k \in \mathbb{C}$) выполняется условие устойчивости в (2.14):

$$|\arg(s_k)| > q \frac{\pi}{2}.$$

При наличии собранных экспериментальных данных и начальной предполагаемой модели процесс идентификации сводится к оптимизации набора параметров *Ө* модели (2.11), который задан следующим образом:

$$a_p = [a_n \ a_{n-1} \cdots \ a_0], \qquad \alpha_p = [\alpha_n \ \alpha_{n-1} \cdots \ \alpha_0], \qquad (3.2)$$
$$b_z = [b_m \ b_{m-1} \cdots \ b_0], \qquad \beta_z = [\beta_m \ \beta_{m-1} \cdots \ \beta_0],$$

где a_p, b_z обозначают коэффициенты дифференциального оператора полиномов полюсов и нулей; α_p, β_z - соответствующие показатели степеней.

Оптимизация параметров осуществляется на основе алгоритма (Рис. 3.2), который состоит из следующих шагов:

- 1. Задать число итераций *N* цикла первоначальной идентификации, шаг изменения общего порядка *q* и критерий ошибки *e*(*t*).
- 2. Произвести первоначальную идентификацию системы при заданном шаге изменения общего порядка *q* за *N* итераций.
- Если число итераций N больше числа шагов изменения общего порядка q в пределах интервала q ∈ [0.01; 2], увеличить порядки полиномов и продолжить идентификацию.
- 4. Если ошибка выхода превышает критерий при завершении итераций первоначального цикла, выбрать результат идентификации с меньшей ошибкой выхода и провести окончательную идентификацию системы с уменьшенным шагом общего порядка *q* в пределах интервала [0; 0.1].

Рассмотренный выше алгоритм использует методы ошибки выхода (*Output error method*) и наименьших квадратов (*least-square*). Критерий оптимизации задаётся квадратичной нормой ошибки выхода $||e(t)||_2^2$. Ошибка выхода определяется следующим образом:

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t),$$
 (3.3)

где y(t) - экспериментальный выходной сигнал и $\hat{y}(t)$ - полученный в результате симуляции модели при воздействии на неё входного экспериментального сигнала u(t).

Данный алгоритм предложен автором этой работы с целью автоматизации процесса идентификации. Алгоритм позволяет найти наилучший вариант модели, идентифицирующей исследуемую систему, путём подбора значения общего порядка *q* в пределах интервала допустимых значений. Таким образом упорядочивается поиск оптимального значения общего порядка, что позволяет уменьшить время

идентификации и улучшить её точность по сравнению с идентификацией проводимой человеком вручную.



Рис. 3.2: Алгоритм идентификации системы

4 Регулятор дробного порядка

В этой главе будет дан обзор регулятора дробного порядка. В части 4.1 даётся определение PID регулятора дробного порядка. Следующая часть 4.2 рассматривает поведение управляемой системы под воздействием дробного управления. Часть 4.3 производит описание методов настройки дробного PID.

4.1 PID регулятор дробного порядка

Понятие PID регулятора дробного порядка, как обобщение PID регулятора, первым предложил И. Подлюбны [7, 6]. Дробный регулятор называется $PI^{\lambda}D^{\mu}$ регулятором и использует интегратор порядка λ и дифференциатор порядка μ . Также И. Подлюбны продемонстрировал, что данный тип регулятора имеет лучшую переходную характеристику, по сравнению с классическим PID, при управлении системами дробного порядка.

Управляющее воздействие PI^λD^µ регулятора может быть выражено следующим образом:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \mathcal{D}^{-\lambda} e(t) + K_d \mathcal{D}^{\mu} e(t), \qquad (4.1)$$

где *e*(*t*) – ошибка управления. Применив преобразование Лапласа к (4.1) при начальных нулевых условиях, можно получить следующее уравнение:

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s^{\lambda}} + K_d s^{\mu} .$$
(4.2)

Если взять показатели степеней такими, что $\lambda = \mu = 1$, то можно получить классический PID.

4.2 Влияние управляющеего воздействия на поведение управляемой системы

В теории управления системами с обратной связью базовое управляющее воздействие и его влияние на поведение управляемой системы обычно представляется в частотной области. Известно, что управляющее воздействие имеет пропорциональную, интегральную и производную компоненты, которые воздействуют на управляемую систему следующим образом:

- пропорциональная компонента увеличивает скорость отклика и уменьшает статическую ошибку, а также относительную устойчивость;
- производная увеличивает относительную устойчивость и чувствительность к шуму;
- интегральная компонента устраняет статическую ошибку и уменьшает относительную устойчивость.

Положительное влияние производной компоненты может наблюдаться в частотной области в виде опережения по фазе на $\pi/2$, а негативное (увеличенная чувствительность к высокочастотному шуму) – в виде увеличения коэффициента усиления с наклоном 20dB/dec.

Положительное влияние интегральной компоненты (устранение статической ошибки) может быть получено при помощи бесконечного усиления на нулевой частоте, негативное (снижение относительной устойчивости) – задержкой на $\pi/2$ по фазе.

При использовании дробного управления, изменяя значение показателя степени $\lambda \in [0; 1]$ интегратора дробного порядка $\frac{K_i}{s^{\lambda}}$, в частотной области можно получить следующее:

- спад амплитудно-частотной характеристики, который варьируется между -20dB/dec и 0dB/dec,
- постоянную задержку по фазе, которая меняется между $-\pi/2$ rad и 0 rad.

Изменяя значение показателя степени $\mu \in [0; 1]$ дифференциатора дробного порядка $K_d s^{\mu}$ возможны следующие эффекты в частотной области:

- рост амплитудно-частотной характеристики, который варьируется между 0dB/dec и 20dB/dec,
- постоянное опережения по фазе, которая меняется между 0 rad и $\pi/2$ rad.

Рассматривая данные свойства, вполне естественно сделать вывод, что путем введения более широкого управления в форме s^n , $\frac{1}{s^n}$, $n \in \mathbb{R}^+$, можно достичь более

удовлетворительного компромисса между положительным и отрицательным влиянием, и объединяя эти влияния мы могли бы разработать более мощные и гибкие методы проектирования, удовлетворяющие спецификациям управляемых систем [6].

4.3 Настройка и оптимизация

Для настройки $PI^{\lambda}D^{\mu}$ регулятора могут использоваться методы оптимизации. При этом существует несколько аспектов, которые необходимо учитывать [4]:

- тип управляемой системы (дробного или целочисленнго порядка),
- спецификации конструкции дробного PID регулятора,
- критерий оптимизации,
- параметры для оптимизации,
- получение начальных параметров для оптимизации.

В связи с наличием массы хорошо изученых методов настройки для большинства типов моделей, можно применить следующий подход. Модель дробного порядка может быть аппроксимирована простой моделью до определённой степени достоверности (точности), которая затем используется для получения параметров PID регулятора целочисленного порядка. Эти параметры оптимизируются для получения наилучшего функционирования управляющего контура.

При оптимизации параметров наиболее часто используются спецификации управляющего контура, которые могут быть получены из частотной характеристики открытого контура $C(j\omega)G(j\omega)$, где $C(j\omega)$ – регулятор и $G(j\omega)$ – управляемая система. Данные спецификации включают [6]:

- Запас устойчивости по амплитуде (gain margin) G_m ,
- Запас устойчивости по фазе (phase margin) φ_m ,
- Подавление помехи при помощи функции чувствительности *S*(*j*ω)

$$S(j\omega) = \frac{1}{1 + C(j\omega)G(j\omega)},$$
(4.3)

 Подавление высокочастотного шума при помощи дополнительной функции чувствительности *T*(*j*ω):

$$T(j\omega) = \frac{C(j\omega)G(j\omega)}{1 + C(j\omega)G(j\omega)}.$$
(4.4)

Для оптимизации параметров дробного PID регулятора используется следующий набор:

$$\theta = \begin{bmatrix} K_p & K_i & K_d & \lambda & \mu \end{bmatrix}.$$
(4.5)

Каждый параметр может быть оптимизирован отдельно.

В качестве критерия оптимизации используются следующие целевые функции:

- интегральная квадратичная ошибка (integral square error) $ISE = \int_0^t e^2(t) dt$,
- интегральная абсолютная ошибка (integral absolute error) $IAE = \int_0^t |e(t)| dt$,
- интегральная время-квадратичная ошибка (integral time-square error) $ITSE = \int_0^t te(t)^2 dt$,
- интегральная время-абсолютная ошибка (integral time-absolute error) $ITAE = \int_0^t t |e(t)| dt$,

где $e(t) = y_{sp} - y(t)$, y_{sp} – значение величины настройки, а y(t) – настроенный отклик замкнутого контура дробной системы управления.

5 Программный пакет FOMCON

Данная глава даёт описание инструментов разрабатываемого в институте автоматики пакета FOMCON ("Fractional-order Modeling and Control"). В части 5.1 производится общий обзор всех инструментов. Часть 5.2 описывает дополнение к FOMCON. Программный пакет доступен по адресу http://fomcon.net/.

5.1 Обзор инструментов FOMCON

FOMCON, или "Fractional-order Modeling and Control" [4], является инструментальным средством среды MATLAB. Он построен на основе существующего инструмента, называемого *FOTF* (Fractional-Order Transfer Functions – передаточные функции дробного порядка).

Данное инструментальное средство было разработано и протестировано в MATLAB v. 7.7, однако, FOMCON может быть совместим и с более ранними версиями MATLAB (v.7.4 – 7.6).

Основной идеей разработки FOMCON было желание получить набор полезных и удобных инструментов для исследования систем дробного порядка. Главным объектом анализа при использовании данного инструмента является передаточная функция дробного порядка, заданная в виде (2.11). Основное внимание в пакете FOMCON уделяется SISO (single input-single output) и LTI (linear-time invariant) системам.

FOMCON состоит из следующих модулей:

- Главный модуль (анализ дробных систем).
- Модуль идентификации (идентификация систем во временной и частотной областях).
- Модуль управления (проектирование дробного PID, инструменты настройки и оптимизации, а также дополнительные функции).

Все модули взаимосвязаны между собой. Доступ к ним можно получить через графический интерфейс пользователя. Для более сложного моделирования также предоставляется набор блоков SIMULINK.

5.1.1 Главный модуль

Графический интерфейс пользователя называется *FOTF* Viewer. Он поделён на две панели (Рис. 5.1).



Рис. 5.1: Графический интерфейс пользователя FOTF Viewer

Левая панель, *Fractional-order transfer functions*, содержит список fotf объектов, которые существуют на данный момент в базе рабочего пространства (список может быть обновлен кнопкой *Refresh*). Она также имеет кнопки для добавления новых объектов, редактирования существующих и удаления ненужных. Функция экспорта имеет 5 вариантов для экспорта fotf объектов:

- Фильтр Осталупа;
- Улучшенный фильтр Осталупа;
- Дробное пространство состояний (foss объект);
- Дробная передаточная функция (frac_tf CRONE объект);
- Дробное пространство состояний (frac_tf CRONE объект).

Для первых двух вариантов возможно автоматически запускать инструмент *LTI Viewer System Control toolbox*'а сразу после завершения экспорта. Для того, чтобы сделать это, пользователь должен поставить галочку напротив Automatically launch *LTI Viewer*.

Правая панель *System analysis* включает в себя следующие функции: позволяет проводить анализ устойчивости системы дробного порядка, симулируя её поведение во временной области и анализируя частотный отклик в частотной области. Также для удобства включены некоторые полезные диалоги.

Меню Tools используется для доступа к другим графическим интерфейсам:

- Идентификация во временной области;
- Идентификация в частотной области;
- Создание дробного PID.

Система, выбранная в списке fotf объектов, будет использоваться для проектировки $PI^{\lambda}D^{\mu}$ регулятора.

5.1.2 Модуль идентификации

Графический интерфейс модуля идентификации системы во времени называется FOTF Time-domain Identification Tool (Puc. 5.2).

Панель Simulation parameters позволяет выбрать тип симуляции необходимой системы. Это включает следующее:

- Вычисление дробной производной методом Грюнвальда-Летникова;
- Аппроксимация фильтра Осталупа;
- Аппроксимация улучшенного фильтра Осталупа.

Две последние опции требуют установки необходимых параметров аппроксимации.

Панель *Identification and options* имеет несколько элементов управления. Во-первых, из списка должна быть выбрана структура fidata. Список заполнен базовыми объектами этого типа из рабочего пространства.

Панель *Identified model* содержит текстовые поля с дробными полиномами нулей и полюсов. Там также есть поля для отметок, которые позволяют фиксировать любой из двух полиномов при идентификации.

4 FOTF Time-do	main Identification Tool
Import	3
— Simulation para	meters
Method	Grunwald-Letnikov
Within w range:	[0.0001; 10000] Of order: 10
- Identification an	nd options
Source data str	ucture (In base workspace)
FIDATA objects:	Refresh
- Identified mo	del
b(s) ✓ fix	1
a(s)	s^2.5+s^2+s^1.5+s+s^0.5+1
L (I/O delay	·, [\$]) 0
Generate initi	al guess model
q (0.01; 2)	0.5 Order 5 Pole polynomial 🖌 Generate
Limit coeffic	cients Min -20 Max 20
Limit expone	ents Min 0.01 Max 10
Free identification	Quick estimate Identify Export system

Рис. 5.2: Графический интерфейс FOTF Time-domain Identification Tool

Панель Generate initial guess model позволяет создавать начальную модель. Чтобы сделать это, полиномы могут быть генерированы независимо путем определения общего порядка q, такого что 0.01 < q < 2, порядка полинома и нажимания кнопки Generate.

В конце, панель опций предоставляет значения для ограничения диапазона поиска коэффициентов и показателей степени. Тип идентификации предоставляет три выбора:

- Свободная идентификация, то есть оптимизируются все параметры модели;
- Фиксированные показатели степеней, хорошо для получения моделей дробного порядка путем обозначения только одного общего порядка;
- Фиксированные коэффициенты, оптимизируются только показатели степеней.

Нажатие кнопки *Identify* будет выполнять идентификацию, также будет показана идентификационная информация в консоли MATLAB. После завершения процесса идентификации, будет показан график с результатами. Если результаты удовлетворительны, система может быть экспортирована в рабочее пространство при помощи кнопки *Export to workspace*.

Также можно импортировать начальную предполагаемую модель через меню, выбирая *Import→Initial guess model*... и печатая название системы в рабочем пространстве.

Идентификация систем в частотной области в данной работе не осуществляется.

5.1.3 Модуль управления

Графический интерфейс модуля управления (Рис. 5.3) называется *Fractional PID Design Tool* и содержит изображение системы управления с единственной обратной связью. Данная система используется для получения дробной системы управления. Графический интерфейс содержит две панели.

Панель Fractional PID Parameters позволяет ввести параметры дробного PID. Нажатие кнопки Export PID controller to workspace вызывает окно, запрашивающее название переменной рабочего пространства для того, чтобы сохранить регулятор.

Панель Fractional control system позволяет видеть регулятор, управляемую систему и всю систему управления в консоли, симулировать поведение созданной системы управления и экспортировать её в рабочее пространство MATLAB. Название переменной рабочего пространства, обозначающей систему, указывается в поле System.

🛃 Fractio	nal PID Design Tool		
Import Tur	ing		''
→	+ PI ^λ D ^μ	Plant +>	-
- Fraction	al PID parameters	Fractional control system	
Кр	1	System G1o3le	
Кі	1	Set value 1	
lambda	0.5	Time 0:0.1:100	
Kd	1	View in console	
mu	0.5	Simulate	
Export of	controller Realize controller	Export control system to workspa	ace

Рис. 5.3: Графический интерфейс Fractional PID Design Tool

Меню *Tuning* даёт доступ к инструментам настройки:

- Инструмент настройки PID целочисленного порядка путем аппроксимации модели процесса;
- Инструмент оптимизации дробного PID.

Начальными значениями для оптимизации дробного PID будут текущие значения, взятые из левой панели.

5.1.3.1 Инструмент оптимизации

Инструмент оптимизации дробного PID представлен графическим интерфейсом *FPID Optimization Tool* (Puc. 5.4).

Панель *Plant model* содержит элементы управления пользователя, позволяющие выбрать систему, для которой разрабатывается дробный PID, и опции симуляции, используемые для аппроксимации системы управления. Следует отметить, что даже если система не задана fotf-объектом, параметры аппроксимации регулятора всё равно должны быть установлены. Здесь также отсутствует симуляция методом Грюнвальда-Летникова.

A FPID Optimization Tool					
Plant model	Optimization and performance settings				
LTI system: G1o3le Type: fotf	Optimization algorithm optimize(): Nelder-Mead				
Approximate as Oustaloup filter	Performance metric ISE				
Within w range: [0.0001; 10000] Of order: 5	Gain and phase margins				
Enable zero cancelation for non-proper LTI systems	Enable gain and phase margin specifications Gain margin (det) Phase margin (det)				
Fractional PID controller parameters					
Tune all parameters Constraints Min Max	Noise and disturbance rejection				
Kp 1 -1000 1000	Enable sensitivity function specifications				
Ki 1 -1000 1000	T(jw) [dB] <= -20 for w >= wt [rad/s]: 10				
lam 0.5 0.01 1.5	S(jw) [dB] <= -20 for w <= ws [rad/s]: 0.01				
Kd 1 -1000 1000	Critical frequency and gain variation robustness				
mu 0.5 0.01 1.5	Enable gain variation robustness at desired critical frequency				
Set Gains V to 1	Set Gains v to 1				
Simulation and and	Control effort saturation Fnable control signal limits				
Max. simulation time [s]: 10000	Minimum 0 Maximum 100				
Time step (min/max) [s]: 0.001 0.5	Optimization setpoint 1 Force strict constraints				
Use Simulink for system simulation Disable warnings Generate report Limit number of iterations					
Model: default Sev	Optimize Take values				

Рис. 5.4: Графический интерфейс FPID Optimization Tool

Панель Fractional PID controller parameters используется для ввода всех параметров регулятора, их максимальных и минимальных разрешенных значений. Можно выбрать следующие методы настройки:

- Настройка всех параметров;
- Фиксированные показатели степеней;
- Фиксированные коэффициенты.

Когда показатели степеней фиксированы при λ = μ = 1, производится такая же настройка, как для целочисленного PID.

Панель Simulation parameters позволяет установить тип симуляции системы и соответствующие опции [10]. Для симуляции также возможно использовать Simulink. Это позволяет устанавливать ограничение (saturation) управляющего воздействия. Чтобы использовать Simulink, нужно поставить отметку напротив Use Simulink for system simulation.

Панель Optimization and performance settings используется для установки спецификаций желаемой производительности: выбора алгоритма оптимизации, качественных индексов (ISE, IAE, ITSE, ITAE) и точности спецификаций, симуляции результатов оптимизации при завершении и ограничения количества итераций оптимизатации. Нажатие кнопки Optimize запустит процесс оптимизации. После получения оптимальных параметров дробного PID можно запустить инструмент создания PID (передав туда значения) нажатием кнопки Take values.

5.1.3.2 Настройка целочисленного PID

Интерфейс *Integer-order PID Tuning Tool* используется для идентификации системы дробного порядка моделью процесса и для настройки целочисленного PID, основанного на полученной модели (Рис. 5.5).

🛃 Integer-order PID Tuning Tool 🛛 🔲 🔀					
– Fractional plant model					
G1o3le					
Approximate as Oustaloup filter					
Within w range: [0.0001; 10000] Of order: 10					
Model type: FOPDT 👻 🗌 Plot results Identify					
Model parameters					
K 50 L 50 T 50					
Integer-order PID tuning					
Method: Ziegler-Nichols Y Compute Take values					
Kp 0 Ki 0 Kd 0					

Рис. 5.5: Графический интерфейс Integer-order PID Tuning Tool

Панель Fractional plant model содержит элементы управления для выбора желаемой модели дробного порядка и параметры аппроксимации для симуляции, которая проводится во время процесса идентификации. Можно выбрать один из двух типов аппроксимации.

Панель Identification by integer order model или панель модели процесса используется для получения параметров модели процесса. Можно также получить график результатов идентификации для оценки правильности модели.

Панель Integer-order PID tuning позволяет найти параметры классического PID, используя следующие методы:

- Формула настройки PID Зиглер-Николса;
- Формула настройки Острём-Хеглунда (AMIGO);
- Формула настройки Чин-Хронс-Ресвика (регуляция эталонного значения с 20% перерегулированием);
- Формула настройки Чин-Хронс-Ресвика (удаление помехи с 20% перерегулированием);
- Формула настройки Коен-Куна.

Нажатием на кнопку *Compute* пересчитываются множители PID по отношению к параметрам *K*, *L*, *T* модели процесса, в то врема как нажатие *Take* values выводит *Fractional* PID Design Tool.

5.2 Новая функция идентификации

Для автоматизации процесса идентификации предлагается новая функция autfid().

Синтаксис

[G] = autfid (id, q, ord_a, ord_b, N)

Входные аргументы

- *id* объект типа fidata, содержащий данные для идентификации во временной области,
- *q* начальное значение общего порядка,
- *ord_a* псевдопорядок полинома полюсов,
- *ord_b* псевдопорядок полинома нулей,
- *N* количество итераций алгоритма.

Выходные аргументы

• *G* – идентифицированная модель системы в виде передаточной функции дробного порядка.

Описание

Данная функция позволяет произвести автоматическую идентификацию системы во временной области согласно алгоритму, описанному в части 3.2. Для оптимизации начальной предполагаемой модели используется функция fid()[4], результат которой применяется при получении вектора ошибки выхода путем симуляции поведения модели идентифицированной системы во временной области. Идентифицированная модель получается при помощи многократной оптимизации начальной модели, где в качестве критерия оптимизации используется квадратичная норма ошибки выхода.

Для получения первичного критерия оптимизации и вектора ошибки выхода используется первый аргумент функции. Это объект типа fidata [4], содержащий набор экспериментальных данных, которые также необходимы для функции lsim() при получении отклика модели.

5.2.1 Пример применения новой функции

Чтобы подтвердить эффективность нового метода, была проведена идентификация некоего абстрактного объекта, представленного передаточной функцией дробного порядка, имеющего сложную динамику выходного сигнала. Передаточная функция имеет следующий вид:

$$G(s) = \frac{2.777s^{1.79} + 7s^{0.15} + 15.355}{5s^{2.21} + 2.27s^{2.03} + 3s^{1.02} + 5.369}.$$

Для идентификации на основе псевдослучайной вариации входного сигнала был получен отклик системы, изображенный на Рис. 5.6.



Рис. 5.6: Набор данных для идентификации

Первая попытка идентификации с использованием всего набора данных заняла слишком много времени, поэтому было решено поделить набор данных на две части и провести идентификацию заново, используя только первую часть.

Обе части набора данных были получены при помощи разделения вектора значений времени, входного и выходного сигналов:

$$t = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_n]^T$$
, $y = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n]^T$, $u = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]^T$

Вектор значений первой части t1,u1,y1 был найден при помощи следующих команд MATLAB:

>> find(diff(u))

В данном случае команда diff(u) находит производную входного сигнала в точках его изменения:

$$u' = [u_2 - u_1 \quad u_3 - u_2 \quad \dots \quad u_n - u_{n-1}]^T$$

Команда find() находит затем точки изменения входного сигнала, соответствующие индексам элементов $u'_k \neq 0$, где k = 1,..., n – 1. Был получен следующий ряд индексов:

1000, 1400, 1800, 2000, 2200, 2600, 2800, 3600, 3800, 4000, 4200, 4400.

Чтобы исходных данных для идентификации не было слишком мало, для разделения набора данных был выбран индекс 3600. Используя данное значение индекса, была создана первая часть набора данных:

$$t1 = t(1:3600); u1 = u(1:3600); y1 = y(1:3600).$$

Затем был создан объект idl (структура исходных данных для проведения идентификации передаточной функцией дробного порядка) типа fidata [4], содержащий 3600 точек:

$$id1 = fidata (y1, u1, t1);$$

Предполагая, что ничего неизвестно об исходном абстрактном объекте, процесс идентификации был запущен путем выбора первоначального значения общего порядка q и псевдопорядков полиномов. В данном случае псевдопорядок полинома нулей был равен 1, псевдопорядок полинома полюсов – 2, а q = 0.01. Алгоритму идентификации потребовалось 4 итерации для получения результата. Последняя итерация дала следующую начальную предполагаемую модель:

$$G_{init} = \frac{s^{0.31} + 1}{s^{0.62} + s^{0.31} + 1}.$$


Рис. 5.7: Результат идентификациипри использовании набора данных id1



Рис.5.8: Валидация полученной модели на полном наборе данных

В результате идентификации была получена модель в виде следующей передаточной функции:

$$\hat{G}(s) = \frac{0.55943s^{1.8562} + 4.4194s^{0.12129}}{1.3957s^{2.2471} + 0.60579s^{1.1753} + 1.0976s^{0.090458}}.$$

Остаточная норма ошибки (Residual norm) при этом равна 0.0051641. Полученную модель можно назвать эквивалентной исходной модели, так как их характеристики совпадают. Результат идентификации показан на Рис. 5.7. Была также проведена валидация полученной модели на полном наборе данных, результат которой можно видеть на Рис. 5.8.

6 Практическое применение

Эта глава будет содержать информацию о применении программного пакета FOMCON в процессе создания регулятора для идентифицируемой системы. В части 6.1 будет дано описание управляемой системы, которая служила источником данных для идентификации. Часть 6.2 содержит информацию о методах идентификации системы, описанной в предыдущей части, моделью дробного порядка. Следующая часть 6.3 рассказывает читателю о методах управления системой сообщающихся сосудов. В части 6.4 описывается реальная система, на которой появилась возможность опробовать методы, применённые ранее. Части 6.5 и 6.6 повествуют о методах идентификации и управления реальной нелинейной системой.

6.1 Описание управляемого объекта

В качестве управляемого объекта в данной работе используется система двух сообщающихся сосудов [16] с жидкостью (Рис. 6.1)..



Рис. 6.1: Управляемый оъект

Для передачи данных эта система соединена с компьютером через USB интерфейс. Управление системой в реальном времени осуществляется при помощи библиотеки Simulink. В области непрерывного времени модель системы (Рис. 6.2) может быть описана следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x}_{1} = \frac{1}{A}u_{1} - d_{12} - w_{1}c_{1}\sqrt{x_{1}},$$

$$\dot{x}_{2} = \frac{1}{A}u_{2} + d_{12} - w_{2}c_{2}\sqrt{x_{2}},$$
(6.1)

где x_1 и x_2 уровень жидкости в сосудах, A – площадь сечения обоих сосудов, c_1 , c_2 и c_{12} - коэффициенты текучести, u_1 и u_2 - производительности насосов, и:

$$d_{12} = w_{12} \cdot c_{12} \cdot sign(x_1 - x_2)\sqrt{|x_1 - x_2|}.$$

У системы сосудов есть три клапана. Каждый клапан может быть полностью открыт или полностью закрыт. Они управляются при помощи переменных w_1 , w_2 и w_{12} модели, где $w \in \{0,1\}$.



Рис. 6.2: Модель сообщающихся сосудов

Коэффициенты текучести для системы сообщающихся сосудов были идентифицированы экспериментльно и имеют следующие значения:

$$c_1 = 0.0292$$
, $c_2 = 0.0259$, $c_{12} = 0.0267$.

Площадь сечения A обоих сосудов равна $10.18 \cdot 10^{-4} m^2$ и максимальная производительность для обоих насосов $u_h = 5.9174 \cdot 10^{-5} m^3/s$. Высота обоих сосудов 0.29 m.

6.2 Методы идентификации

Для идентификации системы сосудов используется метод, предложенный в части 3.2 главы 3 данной работы.

6.2.1 Идентификация одного сосуда

Целью данного эксперимента является идентификация LTI моделью дробного порядка одного сосуда, т. е. клапан, соединяющий два сосуда закрыт. Если рассматривать математическую модель (6.1), то $w_{12} = 0$. Идентификационные данные получены с реальной системы сосудов и преобразованы так, что входной и выходной сигналы находятся в диапазоне $u, y \in [0, 1]$ (Рис. 6.3).



Рис. 6.3: Идентификационные данные

Для облегчения процесса идентификации, вектора значений времени, входного и выходного сигналов были поделены на участки описанным в части 5.2.1 способом. Были получены следующие части набора данных:

- t1=t(1:565); u1=u(1:565); y1=y(1:565);
- t2=t(566:end); u2=u(566:end); y2=y(566:end).

Первым рассматривался участок, содержащий отклик системы при задающем воздействии u(t)=1.0 или u(t)=100% (Рис.6.4).



Рис. 6.4: Первое задающее воздействие

Затем, используя функцию fidata(), была создана структура исходных данных id для проведения идентификации дробной передаточной функцией:

id1 = fidata(y1,u1,t1)

В данном случае важны нулевые условия, в которых находится отклик объекта(сосуда), так как это важно при идентификации дробной моделью.

Идентификация проводилась при помощи функции autfid(). При симуляции использовался метод Грюнвальда-Летникова (2.2). Была сгенерирована начальная приблизительная модель (Initial Guess Model) в виде:

$$G(s)=\frac{1}{s^{1.6}+1}.$$

После идентификации была получена следующая модель в виде передаточной функции дробного порядка:

$$G(s) = \frac{1}{8.536s^{1.1414} + 0.57219s^{3.2436e-014}}.$$

Результат идентификации также представлен на Рис. 6.5.



Рис. 6.5: Результат идентификации сосуда с жидкостью

Как видно по графику, абсолютная ошибка идентификации (разница между выходом идентифицируемого объекта и выходом дробной модели) не превышает 5%. Остаточная норма (Residual norm) при этом была равна 0.062922

Если рассматривать показатель степени второго оператора *s* дробной модели, то можно увидеть, что он приближается к нулю. Поэтому данную модель можно представить в следующем виде:

$$G(s) = \frac{1.7477}{14.9181s^{1.1414} + 1}$$

Модель приведена к нормализованному виду, чтобы получить коэффициент усиления *К* = 1.7477, который определяет статическую передачу.

Далее проведем тест на устойчивость полученной модели. Тест на устойчивость проводился при помощи *FOTF Viewer* приложения FOMCON. Данный тест показал, что идентифицирующая объект дробная передаточная функция устойчива при значении q = 1.14. Псевдорациональная функция дробного порядка имеет один отрицательный полюс на вещественной оси (Рис. 6.6).



Рис. 6.6: Результат теста на устойчивость

Затем была рассмотрена реакция модели дробного порядка на входной сигнал u(t). На Рис. 6.7 можно видеть отклик модели во времени при воздействии на неё управляющего сигнала u(t) = 1 типа *step*. При входном сигнале u(t) = 0.567выход модели объекта достигает значения 1 и соответствует графику на Рис. 6.8.



Рис. 6.7: Отклик модели во времени (step)



Рис. 6.8: Отклик модели при входном сигнале u(t) = 0.567

Отклик модели при импульсном входном сигнале имеет следующий вид (Рис. 6.9):



Рис. 6.9: Отклик модели во времени (impulse)

На следующем этапе был проведён анализ поведения модели в частотной области. При анализе в частотной области результаты, которые показывает диаграмма Боде, можно видеть на Рис. 6.10. Согласно графику Боде, начиная с предельной частоты 10^{-1} rad/s, усиление входного сигнала падает. Также виден спад амплитудно-частотной характеристики -1.1414*20 дБ/дек.



Рис. 6.10: График Боде идентифицированного сосуда

Можно также провести анализ устойчивости дробной модели в частотной области по критериям Найквиста. На Рис. 6.11 можно видеть результат со значением запаса устойчивости по фазе.



Рис. 6.11: Диаграмма Найквиста модели дробного порядка

В связи с широким использованием аппроксимации дробных моделей в FOMCON, был проведен анализ устойчивости аппроксимированной модели. При помощи функции MATLAB oustapp()была получена аппроксимированная модель, а затем получена диаграмма Найквиста этой модели (Рис. 6.12).



Рис. 6.12: Диаграмма Найквиста аппроксимированной модели

На графике Найквиста (Рис. 6.11) видно, что модель дробного порядка является устойчивой, согласно следующей интерпретации теоремы Найквиста [5]:

Для устойчивой открытой модели G(s), замкнутая система (с единственной негативной обратной связью) устойчива, если, и только если, график Найквиста G(s) не окружает точку (-1, j0). Если полный график Найквиста окружает точку (-1, j0) р раз в направлении по часовой стрелке, то будет р неустойчивых замкнутых полюсов.

Запас устойчивости по фазе $\gamma = 111^{\circ}$. Замкнутый контур является устойчивым, так как запас устойчивости по фазе $\gamma > 0$.

Запас устойчивости по амплитуде в данном случае бесконечен, так как нет пересечения между графиком Найквиста и негативной вещественной осью. Он не меньше 1, поэтому можно считать, что замкнутый контур является устойчивым.

Аналогичные результаты были получены при анализе аппраксимированной модели.

В заключении проведём валидацию полученной модели дробного порядка. Для валидации используется вторая часть набора идентификационных данных:

В данном случае, как и для первой части набора данных, при помощи функции fidata()создаётся структура данных id2:

id2 = fidata(y2,u2,t2)

Затем используя команду validate () осуществляется валидация модели сосуда:

>> validate (id2, G)

Результат валидации можно видеть на Рис. 6.13.



Рис. 6.13: Валидация модели на второй части набора данных

При валидации присутствует ошибка, которая обусловлена линейностью модели дробного порядка, полученной с нелинейного объекта. Другой причиной появления ошибки является отсутствие возможности нахождения коэффициента усиления переходного процесса в инструменте идентификации *FOTF Time-Domain Identification Tool*.

Подтвердить зависимость ошибки от наличия коэффициента усиления можно путем добавления коэффициента усиления вручную во время валидации:

>> validate (id2 ,1.34*G)

В данном случае был выбран коэффициент усиления равный 1.34, который дал минимальное значение ошибки (Рис. 6.14).



Рис. 6.14: Валидация при наличии коэффициента усиления

Если добавить в инструмент идентификаци FOTF Time-Domain Identification Tool нахождение коэффициента усиления, то можно будет находить модели процесса с задержкой (FOPDT), обладающие дробной дифференциальной динамикой:

$$G(s) = \frac{K}{1 + Ts^{(\gamma)}} e^{-Ls}$$

Попробуем идентифицировать набор данных idl = fidata(y1,u1,t1) целочисленной моделью с помощью инструмента MATLAB *System Identification Tool*. Наилучший результат (непрерывный график) идентификации, с точностью совпадения 86.37%, можно видеть на Рис. 6.15.

49



Рис. 6.15: Идентификация целочисленной моделью

Как видно по графику (Рис. 6.15), целочисленная модель (непрерывная линия) описывает поведение идентифицируемого объекта (сосуда) с большей ошибкой, если сравнивать с моделью дробного порядка (Рис. 6.16).



Рис. 6.16: Ошибка модели дробного порядка

В виде передаточной функции полученная при идентификации целочисленная модель выглядит следующим образом:

$$G(s) = \frac{1.9687}{1 + 12.463s}$$

Данная модель также имеет один полюс, находящийся в левой полуплоскости комплексной плоскости (Рис. 6.17), что говорит об устойчивости модели.



Рис. 6.17: Полюс целочисленной модели

Показанный на Рис. 6.18 отклик целочисленной модели во времени, при воздействии на неё управляющего сигнала u(t)=1 типа *step*, имеет большее конечное значение по амплитуде, чем у дробной модели.



Рис. 6.18: Отклики целочисленной и дробной моделей во времени

Если сравнивать диаграммы Боде, то можно увидеть различия амплитудно-частотных характеристик целочисленной модели (Рис. 6.19) и модели дробного порядка (Рис. 6.10).



Рис. 6.19: Диаграмма Боде целочисленной модели

6.2.2 Идентификация системы сдвоенных сосудов

В этом эксперименте проводится идентификация одного сосуда, когда соединяющий оба сосуда клапан w_{12} открыт. В модели (6.1) клапаны $w_1 = w_{12} = 1$, а последний клапан закрыт, $w_2 = 0$. Клапан w_2 выступает в качестве меняющейся во времени помехи при управлении наполнением первого сосуда.

В данном случае будет рассматриваться набор данных (Рис. 6.20), где входной сигнал и ∈ [0, 0.5] и выходной сигнал *у* ∈ [0, 1].

При помощи функции autfid() была сгенерирована начальная модель в виде:

$$G(s) = \frac{1}{s^{1.37} + 1}.$$

Затем в процессе идентификации была получена следующая модель дробного порядка:

$$G(s) = \frac{1}{7.8313s^{0.96106} + 0.41245s^{2.0629e - 013}},$$

которую также можно представить в следующем виде:



Рис. 6.20: Отклик системы сдвоенных сосудов

Результат идентификации показан на Рис. 6.21. Абсолютная ошибка идентификации составляет порядка 10%



Рис. 6.21: Результат идентификации системы двух сообщающихся сосудов

Далее при помощи *FOTF Viewer* проведём анализ полученной модели системы сосудов. Тест на устойчивость показал, что модель системы устойчива при общем порядке q = 0.96 и имеет один полюс на вещественной оси (Рис. 6.22)



Рис. 6.22: Результат теста на устойчивость системы из 2х сосудов

Реакция модели дробного порядка на входной сигнал u(t)выглядит следующим образом. На Рис. 6.23 показан отклик модели системы на входной сигнал типа *step*.



Рис. 6.23: Отклик модели при входном сигнале step

Отклик модели при u(t) = 0.415, когда её выход достигает значения 1, и при входном сигнале типа *impulse* показан на Рис. 6.24 и Рис. 6.25 соответственно.







Рис. 6.25: Отклик дробной модели при входном сигнале *impulse*

Анализ системы двух сообщающихся сосудов в частотной области показал результат, который можно видеть на диаграмме Боде (Рис. 6.26).



Рис. 6.26: Диаграмма Боде модели системы двух сообщающихся сосудов

На Рис. 6.26 видно, что усиление входного сигнала на выходе модели падает начиная с предельной частоты 10⁻² Rad/s. Падение амплитудно-частотной характеристики составляет порядка -19.22 дБ/дек.



Рис. 6.27: Диаграмма Найквиста модели дробного порядка

График Найквиста дробной модели (Рис. 6.27) показывает, что она устойчива согласно теореме Найквиста [5].

Запас устойчивости по фазе $\gamma = 118^{\circ}$. Замкнутый контур является устойчивым, так как запас устойчивости по фазе $\gamma > 0$.

Запас устойчивости по амплитуде бесконечен, так как нет пересечения между графиком Найквиста и негативной вещественной осью. Он не меньше 1, поэтому замкнутый контур можно назвать устойчивым.

Также рассмотрим диаграмму Найквиста аппроксимированной модели (Рис. 6.28).



Рис .6.28 Диаграмма Найквиста аппроксимированной модели

Диаграмма Найквиста аппроксимированной модели показывает, что такая модель также устойчива.

Для сравнения проведём идентификацию системы соосбщающихся сосудов целочисленной моделью.



Рис. 6.29: Идентификация системы сосудов целочисленной моделью



Рис. 6.30: Ошибка идентификации целочисленной моделью

По графикам на Рис. 6.29 и Рис. 6.30 видно, что целочисленная модель (непрерывный график) описывает поведение идентифицируемого объекта (сосуда) с похожей ошибкой, если сравнивать с моделью дробного порядка (Рис. 6.31).



Рис. 6.31: Ошибка модели дробного порядка

Полученная при идентификации целочисленная модель выглядит следующим образом:

$$G(s) = \frac{2.3595}{1 + 20.79s}.$$

Расположение единственного полюса (Рис. 6.32) в левой полуплоскости говорит об устойчивости целочисленной модели.



Рис. 6.32: Полюс целочисленной модели

На Рис. 6.33 можно видеть отклик целочисленной модели при входном сигнале типа *step*. Данный отклик не намного отличается от отклика модели дробного порядка.



Рис. 6.33: Отклики целочисленной и дробной модели

Амплитудно-частотные характеристики модели целочисленного порядка и дробной модели различаются незначительно, согласно диаграммам Боде на Рис. 6.26 и Рис. 6.34.



Рис. 6.34: Диаграмма Боде целочисленной модели системы сосудов

6.3 Методы управления

6.3.1 Проектирование регулятора для одного сосуда

Рассмотрим полученную в процессе идентификации в части 6.2.1 модель одного сосуда:

$$G(s) = \frac{1.7477}{14.9181s^{1.1414} + 1}$$

Используя инструмент Integer-order PID Tuning Tool эта модель была идентифицирована FOPDT моделью целочисленного порядка (результат на Рис. 6.35:

$$\hat{G}(s) = \frac{1.78511}{1+8.65456s} e^{-1.43497s}$$

С помощью метода Chien-Hrones-Reswick 1 были получены коэффициенты регулятора целочисленного порядка:

$$K_p = 3.20967$$
, $K_i = 0.264904$, $K_d = 2.16472$.



Рис. 6.35: Идентификация модели дробного порядка целочисленной FOPDT моделью

На следующем этапе полученные коэффициенты PID целочисленного порядка использовались для оптимизации регулятора дробного порядка, как начальные значения. Модель дробного порядка была аппроксимирована фильтром Осталупа порядка N = 5 в диапазоне частот $\omega = [0.0001, 10000]$ rad/s. Показателем точности (performance metric) была выбрана интегральная абсолютная ошибка (IAE). Для симуляции работы системы замкнутого контура использовалась схема Simulink с ограничением управляющего воздействия. Запасы устойчивости по фазе и по амплитуде были выбраны $\varphi_{\rm M} = 100^{\circ}$ и $G_m = 10$ dB соответственно. Заданным значением (set point) для оптимизации было выбрано 1. В процессе оптимизации были выбраны следующие пределы значений коэффициентов и показателей степеней дробного PID:

$$K_{p} \in [0.1, 2.5], K_{i} \in [0.01, 1], K_{d} \in [0.1, 1.8], \lambda \in [0.5, 1.5], \mu \in [0.8, 1].$$

Выбор пределов зависел от желаемой переходной характеристики. После оптимизации были получены следующие параметры PID регулятора дробного порядка:

 $K_p = 1.8529,$ $K_i = 0.11505,$ $K_d = 1.8,$ $\lambda = 1.0006,$ $\mu = 0.8.$

Сам полученный регулятор имеет вид:

$$G_c(s) = 1.8529 + \frac{0.11505}{s^{1.0006}} + 1.8s^{0.8}.$$

Так как показатель степени интегральной компоненты равен λ =1.0006, можно сказать, что в итоге получился *PID*^µ регулятор.



Рис. 6.36: Отклик замкнутого контура и регулятора

На Рис. 6.36 показан отклик замкнутого контура и сигнал управляющего воздействия регулятора.

Можно также рассмотреть работу системы управления при изменении заданного значения. Для этой цели изменим заданное значение с 1 на 0.6 на 50ой секунде симуляции. На Рис. 6.37 показан результат после такого изменения.



Рис. 6.37: Изменение заданного значения

6.3.2 Проектирование регулятора для системы сосудов

При создании регулятора для пары сообщающихся сосудов использовалась полученная в части 6.2.2 модель:

$$G(s) = \frac{2.4245}{18.9875s^{0.96106} + 1}$$

Данную модель удалось идентифицировать следующей FOPDT моделью целочисленного порядка:

$$\widehat{G}(s) = \frac{2.38182}{1 + 21.1777s} e^{-2.11424e - 011s}.$$

Так как задержка FOPDT модели крайне мала, эту модель можно представить в следующем виде:

$$\hat{G}(s) = \frac{2.38182}{1 + 21.1777s}$$

Результат идентификации можно видеть также на Рис. 6.38. Отклики моделей практически полностью совпадают.



Рис. 6.38: Идентификация FOPDT моделью

В данном случае, из-за крайне малого значения L (задержки), значения коэффициентов K_p , K_i , K_d получаются слишком большими, т. е. невозможно создать адекватный регулятор целочисленного порядка. Исходя из этого, для оптимизации регулятора дробного порядка будут использоваться следующие начальные значения коэффициентов:

$$K_p = 1$$
, $K_i = 1$, $K_d = 1$,

и значения показателей степеней:

$$\lambda = 0.5, \qquad \mu = 0.5.$$

Модель дробного порядка аппроксимировалась фильтром Осталупа порядка N = 5 в диапазоне частот $\omega = [0.0001, 10000]$ rad/s. Показателем точности была выбрана интегральная абсолютная ошибка (IAE). Для симуляции работы системы замкнутого контура использовалась схема Simulink с ограничением управляющего воздействия. Запасы устойчивости по фазе и по амплитуде были выбраны $\varphi_{\rm M} = 100^{\circ}$ и $G_m = 10$ dB соответственно. Также использовалось ограничение управляющего воздействия

инструментом оптимизации в пределах [0, 1]. Заданным значением (set point) для оптимизации было выбрано 1. В процессе оптимизации были выбраны следующие пределы значений коэффициентов и показателей степеней дробного PID:

$$K_p \in [0, 2.4], \ K_i \in [0, 1], \ K_d \in [0, 1.2], \ \lambda \in [0.1, 1], \ \mu \in [0.1, 1].$$

После оптимизации были получены следующие параметры PID регулятора дробного порядка:

$$K_p = 2.3506$$
, $K_i = 0.11053$, $K_d = 1.1306$, $\lambda = 0.93629$, $\mu = 0.14304$.

На Рис. 6.39 показан отклик замкнутого контура и сигнал управляющего воздействия регулятора.



Рис. 6.39: Отклик замкнутого контура

Запас устойчивости по амплитуде после оптимизации был равен бесконечности, а запас устойчивости по фазе — 99.9875°.

Поведение замкнутого контура при изменении заданного значения показано на Рис. 6.40.



Рис. 6.40: Работа замкнутого контура при изменении заданного значения

6.4 Описание экспериментального управляемого объекта

В связи с отсутствием возможности проверки полученных в предыдущих экспериментах результатов на реальном управляемом объекте было решено провести дополнительные исследования. Причиной для проведения этих исследований также послужила появившаяся возможность использования экспериментального управляемого объекта в виде системы из трёх сообщающихся баков, заполняемых жидкостью.

Система баков (Рис. 6.41) состоит из трёх ёмкостей соединённых клапанами для слива жидкости [17]. Один из баков имеет постоянную площадь сечения, остальные – сферический и конический, имея таким образом переменную площадь сечения. Это создаёт основную нелинейность системы. Для заполнения верхнего бака используется насос с переменной скоростью вращения, установленный вместе с отдельным баком для жидкости в основании системы. Жидкость вытекает из баков под воздействием силы гравитации. Клапана баков действуют в качестве резисторов потока. У каждого клапана есть управляемый коэффициент площади, который может быть использован для регулировки выходящего потока.



Рис. 6.41: Система баков

Каждый бак снабжен датчиком, который показывает уровень жидкости путём измерения гидравлического давления.

Система баков управляется внешним цифровым регулятором, реализованном на персональном компьютере. Управляющий компьютер соединён с датчиками уровня, клапанами и насосом через отдельную І/О панель и интерфейс питания. І/О панель управляется программным обеспечением реального времени, которое функционирует в среде MATLAB/Simulink.

В данной работе проводятся эксперименты по управлению заполнением жидкостью верхнего бака.

Модель верхнего бака показана на Рис. 6.42.



Рис. 6.42: Модель бака

В области непрерывного времени математическая модель бака, описывающая динамику процесса, может быть описана следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = q - C_1 \sqrt{V_1} \,, \tag{6.2}$$

где:

 V_1 – объём жидкости в баке,

С₁ – коэффициент текучести выходного потока,

 H_1 – уровень жидкости в баке,

q – входящий поток.

Из уравнения (6.2) можно получить следующее:

$$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}H_1}\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} = q - C_1 H_1^{\alpha_1} \,, \tag{6.3}$$

где $\alpha_1 = 1/2$.

Используя уравнение (6.3) может быть получена нелинейная математическая модель бака:

$$\frac{\mathrm{d}H_1}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\beta_1(H_1)} q - \frac{1}{\beta_1(H_1)} C_1 H_1^{\alpha_1},\tag{6.4}$$

где $\beta_1(H_1) = aw$ – постоянная площадь сечения бака.

Геометрические параметры бака [ст] даны на Рис. 6.43.



Рис. 6.43: Геометрические параметры бака

Значение коэффициента текучести выходного потока C_1 было определено опытным путём при помощи оптимизации функцией optimize(), поставляемой с FOMCON. Было получено следующее значение:

$$C_1 = 11.928 \cdot 10^{-5}.$$

Таким же образом было оптимизировано значение α_1 , т. к. установленное ранее в математической модели $\alpha_1 = 1/2$ не отражает динамику реального переходного процесса. Было получено следующее значение:

$$\alpha_1 = 0.2497.$$

Значение входящего потока *q* было идентифицировано экспериментально и представлено с помощью функции polyfit() в виде полиномиальной зависимости от управляющего сигнала:

$$q = [-1.5342u^2 + 4.3672u - 1.8131] \cdot 10^{-4},$$

т. к. при изменении управляющего воздействия *и*, изменение значения входящего потока *q* происходило нелинейно. Максимальный входной поток, создаваемый насосом, равен $q = 1.0284 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3/\text{c}$.

6.5 Идентификация экспериментального управляемого объекта

Идентификация экспериментального управляемого объекта, представляющего собой бак с жидкостью (Рис. 6.41, upper tank), проводилась с помощью набора данных, полученного при значении управляющего воздействия *u* = 0.9. Графическое представление набора данных показано на Рис. 6.44



Рис. 6.44: Набор данных для идентификации

Идентификация проводилась при помощи функции autfid(). Была сгенерирована начальная предполагаемая модель в виде:

$$G(s) = \frac{1}{s^{0.89} + 1}.$$

После идентификации была получена следующая модель:

$$G(s) = \frac{1}{111.6864s^{1.0164} + 5.6892s^{1.0002e-010}}.$$

Результат идентификации также представлен на Рис. 6.45.

Так как оператор $s^{1.0002e-010}$ в дробном полиноме полюсов приводится к свободному члену, модель идентифицированного объекта можно представить в следующем виде:

$$G(s) = \frac{0.17577}{19.6313s^{1.0164} + 1}.$$

Хотя полученная в процессе идентификации модель в целом демонстрирует соответствующее реальному объекту поведение, появляющаяся при этом ошибка (Рис. 6.46) в некоторых случаях достигает существенных величин. Однако это наилучший результат идентификации моделью дробного порядка.





Далее проведём анализ устойчивости и поведения модели дробного порядка во временной и частотной областях. Анализ модели проводится при помощи *FOTF Viewer*.



Устойчивость модели показана на Рис. 6.47.

Рис. 6.47: Устойчивость модели бака

На Рис. 6.48, ниже, показана реакция модели на входной сигнал типа step.



Рис. 6.48: Step модели бака

На следующем графике (Рис. 6.49) можно видеть отклик модели управляемого объекта при входном сигнале u = 0.565. При данном входном сигнале выход
модели достигает значения *у* = 0.1, которое в дальнейшем предполагается использовать как рабочую точку (задание) для системы управления.



Рис. 6.49: Отклик модели при *u* = 0.565

На Рис. 6.50 можно видеть импульсную характеристику модели бака дробного порядка.



Рис. 6.50: Импульсная характеристика модели



Рис. 6.51: Амплитудно-частотная характеристика дробной модели

Поведение модели бака в частотной области можно наблюдать на диаграмме Боде, Рис. 6.51. Усиление входного сигнала падает на выходе модели с увеличением частоты. Также с увеличением частоты происходит отставание выхода по фазе.



Рис. 6.52: Диаграмма Найквиста модели бака

По теореме Найквиста модель является устойчивой, так как график не окружает точку (-1; j0). Запасы устойчивости по амплитуде и фазе равны бесконечности, так как нет

пересечения графика (Рис. 6.52) ни с негативной вещественной осью, ни с единичной окружностью. По данным показателям замкнутая модель также устойчива: запас устойчивости по амплитуде $G_m > 1$, а по фазе $\gamma > 0$.

Для сравнения управляемый объект можно идентифицировать целочисленной моделью, Рис. 6.53.



Рис.6.53: Идентификация целочисленной моделью

Полученная в результате идентификации целочисленная модель имеет вид:

$$G(s) = \frac{0.17746}{1 + 16.935s}.$$

Согласно расположению полюса в единичной окружности – модель целочисленного порядка устойчива, Рис. 6.54.



Рис. 6.54: Полюс целочисленной модели

На Рис. 6.55 показан отклик целочисленной модели в сравнении с откликом модели дробного порядка.



Рис. 6.55: Отклики целочисленной и дробной моделей

Поведение целочисленной модели в частотной области можно наблюдать на Рис. 6.56. Также, как и в случае модели дробного порядка, запасы устойчивости по амплитуде и фазе равны бесконечности, что говорит об устойчивости модели в составе замкнутого контура управления.



Рис. 6.56: Диаграмма Боде целочисленной модели

6.6 Управление экспериментальным объектом

Для создания устройства управления баком применялась полученная в предыдущей части модель дробного порядка:

$$G(s) = \frac{0.17577}{19.6313s^{1.0164} + 1}$$

Эта модель была идентифицирована FOPDT моделью целочисленного порядка:

$$\hat{G}(s) = \frac{0.177029}{1+18.6099s} e^{-0.19115s}$$

Используя метод Chien-Hrones-Reswick 1, были получены коэффициенты целочисленного регулятора:

$$K_p = 522.455, \quad K_i = 20.0529, \quad K_d = 46.9376.$$

На основе коэффициентов целочисленного регулятора были оптимизированы параметры дробного регулятора, которые имеют следующие значения:

$$K_p = 600, \quad K_i = 12.502, \quad K_d = 50.2445, \quad \lambda = 0.49593, \quad \mu = 0.14304.$$

Однако, тест на реальном объекте дробного регулятора показал наличие значительных помех управляющего воздействия, а также на выходе объекта, создаваемых входящим потоком жидкости. Двигатель насоса при этом показывал неустойчивость управления.

Поэтому, исходя из необходимости минимизации помех, были выбраны следующие пределы для оптимизации параметров регулятора:

$$K_p \in [30,40], \quad K_i \in [0,100], \quad K_d \in [0,100], \quad \lambda \in [0.9,1.5], \quad \mu \in [0.01,1.5].$$

Дробная модель аппроксимировалась фильтром Осталупа порядка N = 10 в диапазоне частот $\omega = [0.0001, 10000]$ rad/s. Показателем точности (performance metric) была выбрана интегральная абсолютная ошибка (IAE). Для симуляции работы системы замкнутого контура использовалась схема Simulink с ограничением управляющего воздействия в пределах u = [0, 1]. Заданным значением (set point) для оптимизации было выбрано 0.1. Были получены следующие параметры дробного PID:

$$K_p = 39.0704, K_i = 1.0471, K_d = 32.0705, \lambda = 0.97636, \mu = 0.023461.$$

Для проверки работы этого регулятора применялась схема Simulink с изменением задающего воздействия. В схеме также имитировалась помеха на выходе объекта. Как видно на Рис. 6.57, регулятор достаточно точно удерживает уровень жидкости в баке на отметке 0.1 м, однако при переходе на другие значения уровня наблюдается отклонение от задания. Это ярко выражено при переходе на уровень 0.2 м.

Чтобы улучшить управление, было решено применить схему с *Gain Scheduling*, добавив в предыдущую схему второй регулятор. Дополнительный регулятор оптимизировался для работы при задании равном 0.2. Были выбраны следующие пределы параметров регулятора:

 $K_p \in [35,40], K_i \in [10,100], K_d \in [0,50], \lambda \in [0.01,0.11], \mu \in [0.01,0.11].$

Остальные параметры оптимизации остались прежними.

В результате оптимизации был получен регулятор со следующими параметрами:

 $K_p = 39.8215$, $K_i = 98.6906$, $K_d = 49.7614$, $\lambda = 0.090288$, $\mu = 0.10506$.



Рис. 6.57: Результат работы дробного регулятора

Для проверки работы обоих регуляторов в режиме *Gain Scheduling* в Simulink была составлена схема с ограничением управляющего воздействия, показанная на Рис. 6.58.



Рис. 6.58: Gain Scheduling

В данной схеме применяется изменение задающего воздействия в следующем порядке: 0.1, 0.2, 0.05. *Gain Scheduling* использует два регулятора. Первый регулятор, *Fractional PID controller Low*, работает при значениях задания не более 0.1. Второй регулятор, *Fractional PID controller High*, функционирует

при значениях задания свыше 0.1. Входной поток *q* представлен блоком *Pump* characteristics, а блок *Plant* реализует управляемую нелинейную систему.



Применение данной схемы управления дало показанный на Рис. 6.59 результат.

Рис. 6.59: Управление с Gain Scheduling

Для улучшения управления при значениях задающего воздействия менее 0.1 в Fractional PID controller Low была введена поправка параметра $\lambda = 0.92$.

Для подтверждения эффективности работы замкнутого управляющего контура (Рис. 6.58) в режиме *Gain Scheduling* был проведён эксперимент на реальном управляемом объекте (Рис. 6.41). Управление экспериментальным объектом осуществлялось при помощи схемы Simulink (Рис. 6.60), в которой блок *Fractional PID with controller GS* содержит регуляторы, а блок *Set-point change* – изменения задающего воздействия.



Рис. 6.60: Схема управления первым баком

В результате эксперимента были получены показанные на Рис. 6.61 результаты.



Рис. 6.61: Результаты эксперимента

В ходе эксперимента на 40й секунде была добавлена помеха в виде открытия дополнительного клапана для слива жидкости (блок *Disturbance* на Рис 6.60). В связи с этим было изменено время смены задающего воздействия по сравнению с симуляцией. Задающее воздействие теперь менялось с 0.1 до 0.2 на 100й секунде и с 0.2 до 0.05 на 160й секунде.

В целом управление уровнем жидкости в баке улучшилось, однако проблема наличия помех осталась. Решением данной проблемы стало внедрение в схему управления *расширенного фильтра Калмана (Extended Kalman filter)* [18]. Данные изменения схемы можно видеть на Рис. 6.62, где на выход блока *Plant* помещён расширенный фильтр Калмана.



Рис. 6.62: Схема с Gain Scheduling и Extended Kalman filter

Расширенный фильтр Калмана представляет собой форму алгоритма прогнозакоррекции, используемого для оценки неизмеренных состояний процесса при заданном входе, измеренном выходе, предположении о процессе и уровне шума на выходе процесса. Фильтр Калмана показан на Рис. 6.62, где \hat{x}_k и \hat{y}_k – оценки состояния и измеренного выхода соответственно, а z_k - измеренный выход процесса.



Рис. 6.62: Расширенный фильтр Калмана

Расширенный фильтр Калмана применяется для фильтрации шумов на выходе нелинейного процесса дискретного времени, который может быть представлен в стандартной форме пространства состояний:

$$x_{k} = f(x_{k-1}, u_{k-1}, k) + w_{k-1},$$
$$y_{k} = h(x_{k}, u_{k}, k),$$
$$z_{k} = y_{k} + v_{k},$$

где:

- u_k вход процесса;
- x_k действительное состояние процесса;
- *у_k* действительный выход процесса;
- *z_k* измеренный выход процесса;
- *w_k* и *v_k* шумы процесса и выхода соответственно;
- *f*() и *h*() нелинейные функции, связывающие предыдущее состояние, текущие вход и такт времени и текущий выход соответственно.

Расширенный фильтр Калмана использует алгоритм, состоящий из двух шагов: прогноза и коррекции. На шаге прогноза фильтр получает предварительную оценку состояния системы $\hat{x}_{k|k-1}$ на текущий шаг по итоговой оценке состояния с предыдущего шага. Эту предварительную оценку также называют априорной оценкой состояния, так как для её получения не используются измерения на соответствующем шаге. Второй шаг включает в себя коррекцию априорной оценки состояния, вычисленной на первом шаге, путём использования текущих измерений процесса для генерации обновлённой (или апостериорной) оценки состояния \hat{x}_k .

Из-за нелинейности оцениваемого процесса, уравнения прогноза ковариации и коррекции не могут использовать f и h напрямую. Вместо этого они используют матрицы Якоби функций f и h, определённые как:

$$F_{k-1} = \frac{df}{dx} \Big|_{(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, k)} \qquad H_k = \frac{dh}{dx} \Big|_{(\hat{x}_{k|k-1}, u_k, k)}$$

Шаг прогноза представлен следующим образом:

$$\hat{x}_{k|k-1} = f(\hat{x}_{k-1|k-1}, u_{k-1}, k),$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1}P_{k-1|k-1}F_{k-1}^{T} + Q_{k-1},$$

а шаг коррекции:

$$K_{k} = P_{k|k-1}H_{k}^{T}(H_{k}P_{k|k-1}H_{k}^{T} + R_{k})^{-1},$$
$$\hat{x}_{k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_{k}\left(z_{k} - h(\hat{x}_{k|k-1}, u_{k}, k)\right),$$
$$P_{k} = (I - K_{k}H_{k})P_{k|k-1},$$

где:

- *P_k* обновлённая оценка ковариации ошибки измерения;
- *К_k* оптимальный коэффициент Калмана;
- \hat{x}_k текущая оценка состояния после шагов прогноза и коррекции;
- $\tilde{y}_k = z_k h(\hat{x}_{k|k-1}, u_k, k)$ остаток измерений;
- $S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k$ остаточная ковариация;
- *Q_k* и *R_k* ковариационные матрицы шума w_k процесса и белого шума v_k измерений на выходе системы.

Оценка выхода \hat{y}_k может быть вычислена прямо из \hat{x}_k . P_k и \hat{x}_k сохраняются и используются на шаге прогноза в следующий период времени. Под записью $X_{n|m}$ следует понимать значение параметра X в момент *n* с учетом измерений с момента начала работы и по момент *m* включительно.

Применение расширенного фильтра Калмана позволило снизить влияние помех как на выход управляемой системы, так и на управляющее воздействие, Рис. 6.63.



Рис. 6.63: Управление с расширенным фильтром Калмана

Эффективность применения расширенного фильтра Калмана была проверена также и на экспериментальном объекте. В схеме Simulink (Puc. 6.60) блок *Discrete Filter* был заменен на фильтр Калмана с полученными в процессе исследований параметрами: $C_1 = 22.5 \cdot 10^{-5}$, alpha = 0.5, $x_0 = 1 \cdot 10^{-10}$, P = 0, $Q = 1 \cdot 10^{-5}$, $R = 1 \cdot 10^{-2}$. Результат работы изменённой схемы представлен на Рис. 6.64.



Рис. 6.64: Результат применения расширенного фильтра Калмана

Ошибка оценки, или разница между реальным выходом системы и оцененным фильтром Калмана, показана на Рис. 6.65.



Рис. 6.65: Ошибка оценки

Наибольшая ошибка оценки возникает при появлении помехи на 40й секунде, что обусловлено разной реакцией системы управления и фильтра Калмана на изменение параметров управляемого объекта (коэффициента C₁).

7 Выводы и заключение

В данной главе будет представлен обзор рассмотренных в работе проблем, достигнутые результаты и возможности дальнейшего развития данной темы.

В этой работе автор продемонстрировал применение программного пакета FOMCON для создания управления системой, демонстрирующей нелинейную динамику. В ходе работы были предложены методы улучшения процесса идентификации нелинейной системы моделью дробного порядка и упраления, а также снижения влияния помех на процесс управления. Хотя предложенные методы оказались достаточно эффективными, существуют ещё варианты их совершенствования. Далее будет дано описание рассмотренных в работе проблем.

Идентификация

Автором был предложен алгоритм, автоматизирующий поиск оптимальной модели дробного порядка. Преимуществом использования этого алгоритма при идентификации является меньшее время поиска необходимой модели, а также большая точность соответствия модели идентифицируемой системе, чем при ручной идентификации. Недостатком является зависимость точности соответствия модели от настройки параметров алгоритма и формы получаемой модели.

В процессе работы был рассмотрен метод деления набора данных для идентификации. При помощи данного метода упрощается процесс идентификации, уменьшается также необходимое для него время.

Управление

При создании системы управления с лучшей стороны показал себя метод применения нескольких регуляторов, или *Gain Scheduling*, позволяющий улучшить управление нелинейной системой при различных значениях задания.

Для снижения влияния помех был использован *раширенный фильтр Калмана*, позволяющий с помощью оценки состояния системы получить необходимый выход. Применение данного фильтра позволило снизить влияние помех на управляющее воздействие, что привело к улучшению управления двигателем насоса в случае экспериментального объекта. Однако любое изменение параметров объекта приводило к ошибкам прогноза, т. к. расширенный фильтр Калмана не является адаптивным.

Дальнейшие перспективы

Принимая во внимание предыдущие выводы, можно перечислить следующие направления развития FOMCON и осуществляемых при помощи него методов управления:

- Выбрать форму модели, для которой будут настраиваться параметры алгоритма.
- Провести настройку параметров алгоритма автоматической идентификаци для получения более точной модели.
- Сделать расширенный фильтр Калмана адаптивным для того, чтобы он мог реагировать на изменение параметров управляемой системы.

Литература

- [1] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.
- [2] Y.Q. Chen, I. Petráš, D. Xue, Fractional Order Control A Tutorial, American Control Conference, pp. 1397-1411, 2009.
- [3] A. Oustaloup, J. Sabatier, P. Lanusse, R. Malti, P. Melchior, X. Moreau, M. Moze, An overview of the CRONE approach in system analysis, modeling and identification, observation and control, Proceedings of the 17th World Congress, pp. 14254-14265, 2008.
- [4] A. Tepljakov, Fractional-order Calculus based Identification and Control of Linear Dynamic Systems, Master thesis, TUT, Tallinn, 2011.
- [5] D. Xue, Y.Q. Chen, D.P. Atherton, *Linear Feedback Control Analysis and Design with MATLAB*, Advances in Design and Control, Siam, 2007.
- [6] C. A. Monje, Y.Q. Chen, B.M. Vinagre, D. Xue, V. Feliu, *Fractional-order Systems* and Controls Fundamentals and Applications, Springer-Verlag, London 2010.
- [7] I. Podlubny, *Fractional-order systems and PI*^{λ}D^{μ} *controllers*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1999, 44:208–214.
- [8] L. Ljung, System Identification Theory for the User (Second Edition), Prentice Hall, New Jersey, 1999.
- [9] D. Matignon, Stability Properties for Generalized Fractional Differential Systems, ESAIM: Proc., Vol. 5, 1998, 145-158.
- [10] A. Tepljakov, E. Petlenkov, J. Belikov, A Flexible MATLAB Tool for Optimal Fractional-order PID Controller Design Subject to Specifications, in Proceedings of the 31st Chinese Control Conference, Hefei, Anhui, China, 2012, pp. 4698–4703.
- [11] D. Matignon Generalized Fractional Differential and Difference Equations: Stability Properties and Modeling Issues, Proc. of Math. Theory of Networks and Systems Symposium, Padova, Italy, 1998.

- [12] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego, CA, 1999.
- [13] B.M. Vinagre, I. Podlubny, A. Hernandez, V. Feliu, Some Approximations of Fractional Order Operators Used in Control Theory and Applications.
- [14] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, F. Nanot, *Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, 2000, 47(1):25-40.
- [15] R. Malti, M. Aoun, J. Sabatier, A. Oustaloup, *Tutorial On System Identification Using Fractional Differentiation Models*, 14th IFAC Symposium on System Identification, Newcastle, Australia, pp. 606-611, 2006.
- [16] M. Halás, Discrete-time solution to the disturbance decoupling problem of coupled tanks, Editors: M. Fikar, M. Kvasnica, In Proceedings of the 18th International Conference on Process Control, Tatranská Lomnica, Slovakia, pp. 162–167, 2011.
- [17] Multitank system, MATLAB R2008a/b, R2009a/b, R2010a/b, R2011a/b, PCI version, User's Manual. www.inteco.com.pl.
- [18] Extended Kalman filter, Wikipedia, http://en.wikipedia.org/wiki/ Extended_Kalman_filter.